Physics
JAN 9 - 1947

Akustische Zeitschrift

Im Auftrage der

DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT

unter Mitwirkung der

DEUTSCHEN REICHSPOST und PHYSIKAL.-TECHN. REICHSANSTALT

herausgegeben von

MARTIN GRÜTZMACHER und ERWIN MEYER

1. Herbert Buchholz: Das Schallfeld in einem Kegelhorn unter verschiedenen Anregungsbedingungen 169
2. Hermann Neubert: Die Messung winkelabhängiger Schallschluckung in einer zweidimensionalen Hallkammer 189
3. H. Pfriem: Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen 202
4. E. Furbach: Beeinflussung des Flammpunktes von Mineralölen durch Ultraschallwellen ... 212
5. Jan Harmans: Messung von Schallschluckstoffen und deren Verwendung zur Dämpfung von Rohren 215
6. Schrifttum 231
7. Nachrichten 242

Viertes Heft Fünfter Jahrgang Juli 1940

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Akustische Zeitschrift

Die Zeitschrift erscheint in 6 Heften je Jahrgang. Der Bezugspreis beträgt 10.— RM. je Jahrgang. Von den Originalbeiträgen und zusammenfassenden Berichten stehen den Verfassern 30 Sonderdrucke unberechnet zur Verfügung. Weitere Exemplare werden berechnet und müssen bei Rückgabe der Fahnenkorrekturen bestellt werden

Schriftleitung:

Dr. Martin Grützmacher, Oberregierungsrat und Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

Professor Dr. Erwin Meyer, Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule, Berlin NW. 87, Franklinstr. 1

*

Beiträge, sowie alle die Schriftleitung betreffenden Zuschriften werden erbeten an: Dr. Martin Grützmacher, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

WECO-DÄMMSTOFFE-DRP.

gegen **Schall jeder Art und Stärke** (z. T. auch Wärme) entsprechen den bisherigen Forschungsergebnissen, der neuzeitlichen Technik und den Forderungen der Praxis und Erfahrung und besitzen höchsten Dämmwert, gleichbleibende Dauerwirkung, größte Wirtschaftlichkeit, geringste Baustärke, beste Belastungsfähigkeit und weitgehende Immunität gegenüber allen normalen Einflüssen der Praxis.

Tausendfach bewährte WECO-Schalldämmungen auf Grund **25jähriger Erfahrungen** im In- und Ausland, **zahllose Referenzen** von staatlichen, städtischen, industriellen und sonstigen Bauten und Betrieben über von uns ausgeführte Schall-Dämmungen bei Fußböden, Wänden, Auflagern, Maschinen, Fundamenten usw.

WEISS & CO, LEIPZIG C1 / Weco-Schalldämmungen-DRP.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Viertes Heft | Fünfter Jahrgang | Juli 1940

Das Schallfeld in einem Kegelhorn unter verschiedenen Anregungsbedingungen

Von Herbert Buchholz

Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium für Fernmeldewesen der AEG

(Mit 15 Textabbildungen)

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Ausbreitung des Schalles in einem kegelförmigen Horn von unbegrenzter Länge und mit absolut starren und glatten Wänden. Als Schallquelle innerhalb des Kegels dient zunächst ein Ring von Flächenelementen, die alle mit gleicher Phase und gleicher Normalgeschwindigkeit schwingen und die zu einer mit der Kegelspitze konzentrischen Kugelfläche gehören. Bei dieser Form der Schallquelle wird die Lösung sowohl für den Kegel mit Spitze als auch für einen Kegel entwickelt, der statt der Spitze durch eine Kugelkappe begrenzt ist. Von besonderer Bedeutung ist die Lösung, die hieraus entsteht, wenn der vibrierende Ring in die Oberfläche der Kugelkappe selbst hineinrückt. Sie wird in der Arbeit bis zu dem Fall weiter verallgemeinert, wo die Kugelkappe zwar immer noch eine axialsymmetrische, sonst aber beliebige Schwingungsbewegung ausführt. Als Sonderfälle dieser allgemeinsten Lösung werden die radial und die axial schwingende Kugelkappe untersucht. Ferner ergibt sich aus ihr durch Grenzübergang auch die Lösung für die Schallbewegung in einem einseitig abgeschlossenen zylindrischen Rohr, dessen Grundplatte beliebige axialsymmetrische Schwingungen ausführt. Die Lösungen für Kegel und Zylinder zusammen würden es ermöglichen, den Übergang einer ebenen Welle aus einem kreiszylindrischen Rohr in einen Kegel oder umgekehrt in Strenge zu behandeln.

In Abschnitt 8 werden die Eigenschwingungen berechnet, die sich in einem durch eine Kugelkappe abgeschlossenen Kegel mit beliebigem Öffnungswinkel ausbilden. Das Ergebnis dieser Rechnungen bildet eine Formel für die Druckverteilung in einem Kugelkegel, wenn die Schwingungen der Luft durch einen in der zentralen Bohrung der Kugelkappe hin- und hergehenden Kolben angefacht werden. Für sehr langsame Schwingungen entartet diese Formel in die einfache Beziehung für den Druck im Topf eines Helmholtzschen Resonators.

Liste der Formelzeichen

$\exp(-i\omega t)$	das Zeitgesetz der eintönigen Schwingungen mit $i = \sqrt{-1}$.
λ, $k = 2\pi/\lambda$	die Wellenlänge der sich im Medium ausbreitenden freien Raumwelle in cm und die Wellenzahl in 1/cm.
p	der Schalldruck in g/(cm · s²).
c	die Schallgeschwindigkeit in cm/s für Luft von 20° C ist $c = 3{,}438 \cdot 10^4$, für Wasser von 15° C $c = 1{,}498 \cdot 10^5$.
ϱ_0	die mittlere Dichte des den Schall fortpflanzenden Mediums in g/cm³.
$c\,\varrho_0$	der Schallwellenwiderstand in g/(cm²·s) Luft 43, Wasser $1{,}5\,10^5$.
v_r, v_ϑ	die Komponenten der Schallschnelle in cm/s.
V_n	die Normalgeschwindigkeit eines der vibrierenden Flächenelemente in cm/s.
L	die Schalleistung in g · cm²/s³.
r, ϑ, φ	die Komponenten eines Aufpunktes in Polarkoordinaten.
z, ϱ, φ	die Komponenten eines Aufpunktes in Zylinderkoordinaten.

α der Öffnungswinkel des Kegels zwischen Kegelachse und Kegelmantel.

$c\,\varrho_0 \cdot z_\nu$ der Schallwellenwiderstand der ν-ten Teilwelle im Horn.

$n_{p,-1}$ die unendlich vielen Wurzeln der Gl. $P_n^{-1}(\cos\alpha) = 0$ in bezug auf n.

$j_{1,p}$ die unendlich vielen Wurzeln der Gl. $J_1(x) = 0$.

$\psi_n(x) = (\pi/2\,x)^{1/2} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x)$

$\zeta_n^{(1)}(x) = (\pi/2\,x)^{1/2} \cdot H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x)$.

1. Einleitung

Die Ausbreitung von Schallwellen in langgestreckten Hohlräumen veränderlichen Querschnitts wird in der Akustik nach einem auf A. G. WEBSTER zurückgehenden Verfahren [1] als ein eindimensionales Problem behandelt. Physikalisch besagt dieses Vorgehen, daß in einem Horn die Feldgrößen des Schallfeldes im wesentlichen nur von der Längskoordinate als abhängig betrachtet werden. Bei einem Ton bestimmter Frequenz läuft darnach die Lösung der Aufgabe auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.1) hinaus, in der p den Schalldruck, x den Abstand eines einzelnen Hornquerschnitts vom Koordinaten-

$$(1.1)\quad \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d}{dx}\{\ln A(x)\} \cdot \frac{dp}{dx} + k^2 \cdot p = 0$$

anfangspunkt und $A(x)$ den Querschnitt des Horns im Abstand x bedeuten. Der Vorteil der WEBSTERschen Betrachtungsweise liegt in seiner außerordentlichen Anpassungsfähigkeit an die verschiedenen Formen der Horne. Trotz der Vernachlässigungen, die in dieser vereinfachten Darstellung der in Wirklichkeit verwickelteren Vorgänge stecken, sind damit sehr befriedigende Resultate erzielt worden. In einer Reihe von Arbeiten, von denen einige [2, 4, 6] in der Literaturübersicht angeführt sind, werden die praktischen Folgerungen, die sich aus der Auflösung von (1.1) ergeben, eingehend erörtert. Es versteht sich von selbst, daß eine strengere Untersuchung der Schallausbreitung in Hornen, in der auch andere als rein radiale Bewegungsvorgänge berücksichtigt werden, sich von vornherein auf eine bestimmte Form des Horns beschränken muß. Von den mannigfachen axialsymmetrischen Hornformen, die denkbar sind, kommen für eine strenge analytische Behandlung wohl nur das Kegelhorn, das Paraboloidhorn und das Hyperboloidhorn in Betracht.

In der vorliegenden Arbeit soll die Ausbreitung des Schalles im Kegelhorn behandelt werden. Wir werden dabei mit dem Grade der Strenge verfahren, wie er in der Annahme lediglich linearer Störungsglieder im Gleichgewicht der Luftteilchen zum Ausdruck kommt. Dabei soll auch der Einfluß der Schallquelle mit in Betracht gezogen werden. Um uns in dieser Hinsicht nicht in unnötige Weitschweifigkeiten zu verlieren, wollen wir grundsätzlich die Annahme machen, daß die Anregung der Schallwelle symmetrisch zur Achse des Kegels

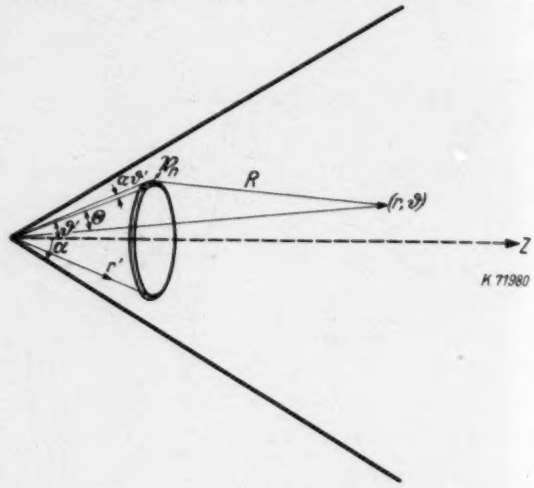


Abb. 1. Die Lage des vibrierenden Ringes im Innern des Kegelhohlraums

erfolgt. Sie gehe, wie vorausgesetzt werden soll, von einer vibrierenden Kugelkappe aus, die den kegelförmigen Trichter an seinem spitzen Ende begrenzt. Im übrigen mögen ihre Schwingungen eintönig und harmonisch sein. Das Horn soll als unendlich lang betrachtet werden und seine Wände als absolut starr und vollkommen glatt.

Für die Rechnung beginnen wir die Untersuchungen zweckmäßig mit einer Schallquelle, die aus einer stetigen Aufeinanderfolge vibrierender Flächenelemente besteht, die frei im Hohlraum des Kegels stehen. Sie mögen gemäß Abb. 1 den zur Kegelachse koaxialen Kreis

(r', ϑ') ausfüllen. Der Kegel habe in diesem vorbereitenden Teil der Untersuchung noch eine ausgeprägte Spitze. Nachdem für diese Aufgabe die Lösung gefunden worden ist, ergänzen wir sie dahin, daß sie auch für einen Kegel gilt, der nicht durch eine Spitze, sondern durch eine starre Kugelkappe vom Radius $a < r'$ begrenzt ist. Der darnach erfolgende Grenzübergang $r' \to a$ führt dann zu einer Lösung, die sehr leicht weiter verallgemeinert werden kann und von der wir auch in diesem Sinne Gebrauch machen werden. Physikalisch betrachtet gibt sie die Beziehung für das Feld des Schalldrucks in einem unendlich langen Kegel an, der an seinem verjüngten Ende durch eine Kugelkappe begrenzt ist und in dem die Schallbewegung durch einen in der Oberfläche der Kappe vibrierenden Ring von Flächenelementen erzeugt wird. Das Schallfeld der als Ganzes schwingenden Kugelkappe, sei es nun, daß diese Schwingungen radial, axial oder nach einer anderen Gesetzmäßigkeit erfolgen, ergibt sich dann aus dieser Grundlösung durch eine Integration über den Öffnungswinkel des Ringes. Am Schluß der Arbeit werden wir den gleichen Gedankengang anwenden, um die Schwingungen in einem endlichen, am Ende durch eine Kugelkappe abgeschlossenen Resonator zu ermitteln, wenn er durch eine kleine Öffnung hindurch von einer äußeren fremden Welle zu Schwingungen angeregt wird. Die Resonanzbedingungen eines solchen Raumes ergeben sich dabei von selbst.

Um von vornherein eine physikalische Größe an der Hand zu haben und nicht mit dem schleppenden Hilfsbegriff des Geschwindigkeitspotentiales arbeiten zu müssen, benutzen wir im nachstehenden wie STENZEL [5] als maßgebenden Skalar den Druck des Schallfeldes selbst. Bei einem Zeitgesetz $\exp(-\mathrm{i}\,\omega t)$ hängt dieser Druck mit der Schnelle $\mathfrak{v}$ über die Gl. (1.2) zusammen. In ihr ist $c \cdot \varrho_0$ der Schall-

$$\mathfrak{v} = 1/(\mathrm{i}\,\varrho_0\, c\, k) \cdot \operatorname{grad} p \tag{1.2}$$

wellenwiderstand des vorliegenden Mediums in der Wellenzone der freien Raumwelle. Sein Zahlenwert beträgt in der Luft 43, in Wasser $1{,}5 \cdot 10^5$ g/(s · cm²).

2. Die Beziehung für das primäre Druckfeld einer Ringquelle

Entsprechend dem oben für die Lösung der Aufgabe entworfenen Plan stellen wir zunächst die geeignete mathematische Beziehung für das primäre Druckfeld einer ringförmigen Schallquelle auf. Dieser Ring bestehe im einzelnen aus den Flächenelementen $r'^2 \cdot \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' \cdot d\varphi'$ einer Kugel mit dem Radius r' und erscheine von der Kegelspitze aus unter dem Öffnungswinkel ϑ'. Alle Flächenelemente des Ringes mögen mit der gleichen Phase schwingen und die gleiche Geschwindigkeitsamplitude $V_n(\vartheta')$ besitzen. Dann ist nach einem allgemeinen Gesetz [3] das Druckfeld dieses schwingenden Ringes durch die Gl. (2.1) gegeben, in der R den Abstand zwischen einem einzelnen Flächenelement und einem beliebigen Aufpunkt des

$$p^{(e)} = -\frac{\mathrm{i}\,c\,\varrho_0}{4\pi k} \cdot (k r')^2 \cdot V_n(\vartheta') \times \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' \cdot \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R} \cdot d\varphi' \tag{2.1}$$

Feldes bedeutet. Nun ist bekanntlich der Integrand von (2.1) in bezug auf das Polarkoordinatensystem von Abb. 1, wenn $r > r'$ ist, durch die absolut konvergente Reihe (2.2)

$$e^{\mathrm{i}kR}/R = \mathrm{i}\,k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \times \zeta_n^{(1)}(k r)\, \psi_n(k r') \cdot \mathrm{P}_n(\cos\theta) \tag{2.2}$$

darstellbar, in der der Winkel θ mit den Winkeln ϑ, ϑ', φ und φ' über den sphärischen cos-Satz (2.2a) zusammenhängt.

$$\cos\theta = \cos\vartheta \cdot \cos\vartheta' + \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta' \times \cos(\varphi - \varphi'). \tag{2.2a}$$

An Stelle der Reihenentwicklung (2.2) benutzen wir im folgenden die Darstellung (2.3) durch ein komplexes Integral, das in der angeschriebenen Form wiederum nur gültig ist für $r > r'$. Der Verlauf des Weges $\mathfrak{C}$ in (2.3) ist

$$e^{\mathrm{i}kR}/R = k \cdot \int_{\mathfrak{C}} \zeta^{(1)}_{s-\frac{1}{2}}(k r)\, \psi_{s-\frac{1}{2}}(k r') \times \mathrm{P}_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) \cdot \frac{s \cdot d s}{\cos\pi s} \tag{2.3}$$

in Abb. 2 angegeben. Geht man mit (2.3) in die Gl. (2.1) ein, so kann zunächst wegen der absoluten Konvergenz von (2.3) die Reihen-

folge der Integrationen vertauscht werden. Wendet man dann auf $P_{s-1/2}(-\cos\vartheta)$ das Additionstheorem[1]) der Kugelfunktionen an, so entsteht für das primäre Druckfeld des schwingenden Ringes unmittelbar die Integral-

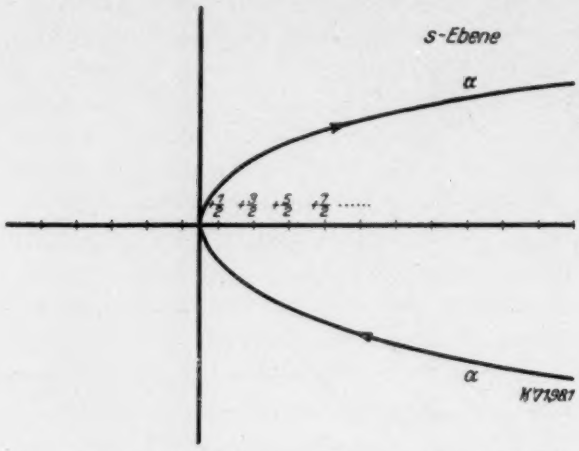


Abb. 2. Der Integrationsweg $\mathfrak{C} \equiv \alpha$ in der s-Ebene von Integral (2.3)

darstellung (2.4), die den Ausgangspunkt für die weiteren Rechenoperationen bildet.

$$p^{(e)}(r,\vartheta) = -\mathrm{i}\,c\,\varrho_0/2 \cdot V_n(\vartheta') \cdot (k r')^2 \times \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' \cdot \int_{\mathfrak{C}} \zeta^{(1)}_{s-\frac{1}{2}}(k r)\, \psi_{s-\frac{1}{2}}(k r') \times P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\vartheta)\, P_{s-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta') \cdot \frac{s \cdot d s}{\cos \pi s}. \tag{2.4}$$

Der Ausdruck (2.4) gilt seiner Entstehung nach für alle $r > r'$ und $\vartheta > \vartheta'$. Für ein $r < r'$ und $\vartheta < \vartheta'$ braucht man nur unter dem Integralzeichen r mit r' und ϑ mit ϑ' zu vertauschen.

3.1. Die Lösung für den Kegel mit Spitze

Der Raum, in dem sich das Druckfeld der Gl. (2.4) verteilt, sei von nun ab begrenzt von einem Kegel, der die gleiche Achse hat wie die ringförmige Schallquelle und dessen Spitze im Ursprung des auch bisher schon benutzten Polarkoordinatensystems liegt. Der Öffnungswinkel α dieses Kegels sei größer als ϑ'. Die starren Wände des Kegels stören die Verteilung des Druckfeldes, das die Gl. (2.4) beschreibt, und geben dadurch Veranlassung zu der Entstehung eines Störungsfeldes. Für dieses sich dem ursprünglichen Felde überlagernde Störungsfeld machen wir im eingeschwungenen Zustand des Feldes den Ansatz (3.1), in dem $A(s)$ eine vorläufig noch unbekannte Funktion ist, die die Konvergenz des Integrals, wie zunächst angenommen werden soll, nicht beeinträchtigt. Die Abhängigkeit von r wird in diesem Ansatz durch dieselbe Funktion beherrscht wie in der Gl. (2.4). Das entspricht

$$\Delta p(r,\vartheta) = -\mathrm{i}\,c\,\varrho_0/2 \cdot V_n(\vartheta') \cdot (k r')^2 \times \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' \cdot \int_{\mathfrak{C}} \zeta^{(1)}_{s-\frac{1}{2}}(k r)\, \psi_{s-\frac{1}{2}}(k r') \times A(s) \cdot P_{s-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\, P_{s-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta') \cdot \frac{s \cdot d s}{\cos \pi s} \tag{3.1}$$

durchaus unserer physikalischen Vorstellung, denn auch das Störungsfeld wird z. B. im Raum der $r > r'$ den Charakter einer fortschreitenden Welle haben. In bezug auf ϑ hängt jedoch in (3.1) der Druck des Störungsfeldes von der Funktion $P_{s-1/2}(+\cos\vartheta)$ ab. Diese Funktion stellt das zweite Partikularintegral der Differentialgleichung der Kugelfunktionen dar, das bei beliebigem s von dem in (2.4) verwendeten unabhängig ist. Sie zeigt zugleich die für das Störungsfeld notwendige Eigenschaft in den Punkten der Kegelachse, wo $\vartheta = 0$ ist, endlich zu bleiben.

Am Kegelmantel muß nun auf jeden Fall $v_\vartheta = 0$ sein. Demnach muß dort, ob nun $r > r'$ oder $r < r'$ ist, für $A(s)$ die Beziehung (3.2) bestehen. Wir führen noch zur Abkürzung der Schreibweise die Hilfsfunktion (3.3) ein. Dann entsteht für das gesamte Druckfeld, das ein vibrierender Ring (r', ϑ')

$$A(s) \cdot P^{-1}_{s-\frac{1}{2}}(\cos\alpha) - P^{-1}_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\alpha) = 0 \tag{3.2}$$

$$f_{s-\frac{1}{2}}(\vartheta,\alpha) = P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\vartheta)\, P^{-1}_{s-\frac{1}{2}}(\cos\alpha) + P_{s-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\, P^{-1}_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\alpha) \tag{3.3}$$

im Innern eines unendlich langen Kegels erzeugt, die folgende endgültige Integraldar-

[1]) Wegen der rein mathematischen Fragen, die im Zusammenhang stehen mit der Theorie der Kugelfunktionen, wird der daran interessierte Leser auf den Anhang zu der unter [9] zitierten Arbeit verwiesen.

stellung:

$$p(r,\vartheta) = -\mathrm{i}\,c\,\varrho_0/2 \cdot V_n(\vartheta') \cdot (k r')^2 \times \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' \cdot \int_{\mathfrak{C}} \zeta^{(1)}_{s-\frac{1}{2}}(k r)\, \psi_{s-\frac{1}{2}}(k r') \times f_{s-\frac{1}{2}}(\vartheta,\alpha) \cdot \mathrm{P}_{s-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta')/\mathrm{P}^{-1}_{s-\frac{1}{2}}(\cos\alpha) \times s \cdot ds/\cos\pi s\,. \tag{3.4}$$

Sie gilt für alle $r > r'$ und $\vartheta > \vartheta'$. Sie ist im anderen Falle ebenso zu behandeln wie die Gl. (2.4).

Wir verwandeln nun das Integral (3.4) sofort wieder in eine unendliche Reihe. Bei der Durchführung dieser Aufgabe ist es sehr wesentlich,

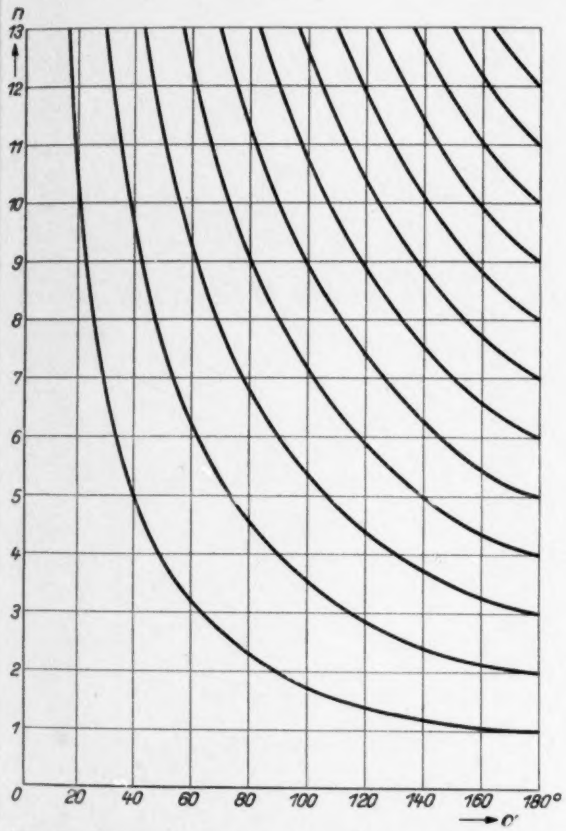


Abb. 3. Die Wurzeln der Gl. $P_n^{-1}(\cos\alpha) = 0$ in dem ganzen Winkelbereich $0 < \alpha < 180^0$

zu erkennen, daß für den Integranden von (3.4) die Nullstellen $s = p + 1/2$ von $\cos(\pi s)$ mit $p = 1, 2, 3 \ldots$ keine wirklichen Pole mehr sind, denn wegen der Gl. (3.5) verschwindet

$$\mathrm{P}_n^{-m}(-\cos\alpha) = (-)^{n+m} \cdot \mathrm{P}_n^{-m}(\cos\alpha) \qquad (n + m = 0, 1, 2, 3 \ldots) \tag{3.5}$$

an allen diesen Stellen auch die Funktion $f_{s-1/2}$ von (3.3). Eine Ausnahme hiervon bildet nur die Stelle $s = 1/2$. Für sie ist nämlich

$$f_0(\vartheta,\alpha)/\mathrm{P}_0^{-1}(\cos\alpha) = 1/\sin^2\frac{\alpha}{2}\,. \tag{3.6}$$

Der Integrand von (3.4) besitzt aber innerhalb des von $\mathfrak{C}$ umschlungenen Gebietes der s-Ebene dennoch eine unendliche Reihe einfacher Pole, weil nämlich der Nenner außerdem noch in den Nullstellen der Funktion $\mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)$ in bezug auf n verschwindet. Diese Wurzeln sind alle reell und einfach und liegen symmetrisch zu dem Punkt $s = -1/2$. Für den Winkelbereich $0 < \alpha < 180^0$ sind sie in Abb. 3

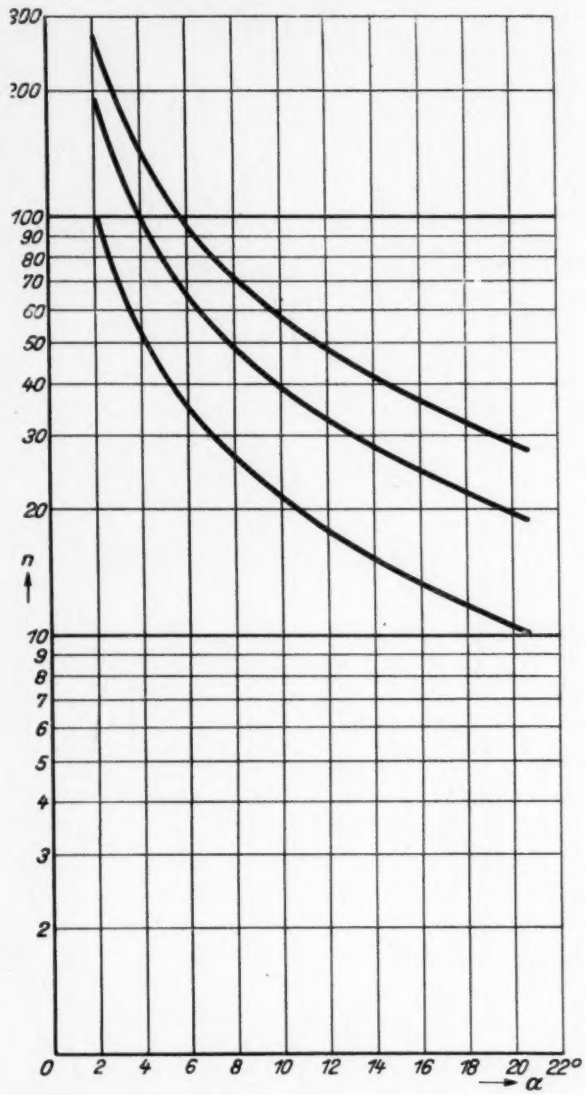


Abb. 4. Die ersten drei Wurzeln der Gl. $P_n^{-1}(\cos\alpha) = 0$ im Winkelbereich $0 < \alpha < 20^0$

graphisch dargestellt, soweit die Skala der n-Werte es gestattet. Um auch größere Werte von n zu erfassen, wurden für den kleineren Winkelbereich $0 < \alpha < 20^0$ in Abb. 4 die drei ersten Wurzeln von P_n^{-1} $(\cos\alpha)$ noch einmal besonders aufgezeichnet. Über die Berechnung dieser Wurzeln findet man einige Angaben in den unter [8] und [10] zitierten Arbeiten sowie in der Arbeit [6] des Verfassers.

Die Aufstellung der fertigen Lösung macht nach diesen Bemerkungen keine Schwierigkeit mehr. Die durch Gl. (3.7) dargestellte Form dieser Lösung ist nach wie vor nur für $r > r'$

$$
\begin{aligned}
p(r,\vartheta) &= \varrho_0 c/\sin\alpha \cdot V_n(\vartheta') \cdot (k r')^2 \cdot \sin\vartheta' \\
&\times d\vartheta' \cdot \Big\{ -\mathrm{i} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}kr} \cdot \sin k r'}{k r \cdot k r'} \\
&+ \sum_{\nu=n_{p,-1}}^{p=1,\infty} \zeta_\nu^{(1)}(k r)\, \psi_\nu(k r') \cdot \frac{2\nu+1}{\nu\cdot(\nu+1)} \\
&\times \frac{P_\nu(\cos\vartheta) \cdot P_\nu(\cos\vartheta')}{P_\nu(\cos\alpha) \cdot (\partial P_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu}}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

gültig. Für ein $r < r'$ müssen in der geschweiften Klammer r und r' ihre Plätze vertauschen. Der Winkel α kann in Gl. (3.7) alle Werte zwischen 0 und 180^0 annehmen. Die frühere Beschränkung auf ϑ-Werte mit $\vartheta > \vartheta'$ kommt für die Gl. (3.7) in Fortfall.

Für die formale Rechnung ist es bequemer, das in der geschweiften Klammer von (3.7) alleinstehende Glied in die Summe mit hineinzunehmen. Das läßt sich einrichten, wenn man die willkürliche Festsetzung trifft, daß das Produkt von Gl. (3.8) für $\nu = 0$ den rechts angegebenen Wert besitzt. In Wirklichkeit ist das jedoch nicht der Fall.

$$
\{\nu \cdot (\partial P_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu}\}_{\nu=0} = \operatorname{tg}(\alpha/2) \tag{3.8}
$$

3.2. Die Lösung für den Kegel mit einer Kugelkappe am spitzen Ende

Eine Diskussion der bisherigen Lösung stellen wir zurück, bis wir die vor allem interessierende Grundlösung gefunden haben. Wir fahren also sogleich mit dem Umbau der Lösung (3.7) fort und gestalten sie zunächst in der Richtung weiter aus, daß sie an der Kugelfläche $a < r'$ der Voraussetzung der Starrheit Rechnung trägt.

Im Raumteil $r < r'$ der Spitze des Kegels enthält die bisherige Lösung die Faktoren

$$
\zeta_\nu^{(1)}(k r')\, \psi_\nu(k r) .
$$

Wir haben es also dort jedenfalls mit einer stehenden Welle zu tun. Wir ergänzen dann die Lösung (3.7) durch eine zweite Lösung, die das gleiche Aussehen hat wie die erste, jedoch an Stelle der eben erwähnten Faktoren die folgenden enthält:

$$
a_\nu \cdot \zeta_\nu^{(1)}(k r)\, \psi_\nu(k r') \qquad (\nu = 0,\ \nu = n_{p,-1}).
$$

Sie soll gültig sein für alle $r \geq a$ und also auch im Raumteil $r > r'$. Dieser Ansatz, in dem die a_ν vorläufig noch unbekannte Konstanten sind, bringt physikalisch die Auffassung zum Ausdruck, daß das Vorhandensein der Kugelkappe $r = a$ einen in Richtung wachsender r fortschreitenden Wellenzug auslöst. Die unbekannten Konstanten a_ν bestimmen sich dann aus der Forderung, daß für $r = a$ die Komponente $\mathfrak{v}_r$ der Schnelle verschwinden muß. Mithin müssen die a_ν die Gleichung erfüllen:

$$
\zeta_\nu^{(1)}(k r')\, \psi_\nu'(k a) + a_\nu \cdot \psi_\nu(k r')\, \zeta_\nu^{(1)\prime}(k a) = 0 \qquad (\nu = 0,\ n_{p,-1}). \tag{3.9}
$$

Mit den aus (3.9) berechenbaren Koeffizienten a_ν gilt dann im Raumteil $r > r'$ für das totale Druckfeld innerhalb des durch eine Kugelkappe begrenzten Kegels als Lösung ein Ausdruck, der sich von der Gl. (3.7) nur darin unterscheidet, daß sich die Glieder in der geschweiften Klammer mit den Faktoren $1 + a_\nu$ multiplizieren. Wir schreiben diese Beziehung nicht explizite an, da wir an dem Fall $r' > a$ kein selbständiges Interesse haben.

4. Die Grundlösung für das Druckfeld eines in einer Kugelkappe vibrierenden Ringes im Hohlraum eines Kegels

Um zu der gesuchten Grundlösung zu kommen, bedarf es danach nur noch eines letzten Schrittes. Er besteht in der Maßnahme, den Abstand r' des vibrierenden Ringes in den Radius $a = r'$ der Kugelkappe überzuführen. Aus der Gl. (3.9) folgt für ein $r' = a$ der einfache Ausdruck

$$
1 + a_\nu = \mathrm{i}/\{(a k)^2 \cdot \zeta_\nu^{(1)\prime}(a k)\} .
$$

Für das Druckfeld einer in einen Kegel vom Öffnungswinkel α eingeschlossenen Kugelkappe, in deren Oberfläche ein einzelner Ring von der Breite $a \cdot d\vartheta'$ und dem Öffnungswinkel ϑ' eintönige Schwingungen der Frequenz $\omega = k\,c$ ausführt, ergibt sich also die folgende endgültige Darstellung:

$$\begin{aligned} p(r,\vartheta) = &-\mathrm{i}\,c\varrho_0/\sin\alpha \cdot V_n(\vartheta') \cdot (a^2 k^2 \sin\vartheta' \\ &\times d\vartheta') \cdot \Big\{ + \frac{\operatorname{ctg}\alpha/2}{1 - \mathrm{i}\,a\,k} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}k(r-a)}}{r\,k} + \mathrm{i}/(a\,k)^2 \\ &\times \sum_{\nu=n_{p,-1}}^{p=1,\infty} \frac{2\nu+1}{\nu\cdot(\nu+1)} \cdot \frac{\zeta_\nu^{(1)}(r\,k)}{\zeta_\nu^{(1)}(a\,k)} \cdot z_\nu(a\,k) \\ &\times \frac{\mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta)\cdot \mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta')}{\mathrm{P}_\nu(\cos\alpha)\,(\partial\,\mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial\,n)_{n=\nu}} \Big\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$z_\nu(a\,k) = \mathrm{i}/\left\{\frac{d}{d\,x}\ln\zeta_\nu^{(1)}(x)\right\}_{x=a\,k} = \mathrm{i}\cdot\zeta_\nu^{(1)}(a\,k)/\zeta_\nu^{(1)\prime}(a\,k)\,. \tag{4.1a}$$

Hierin ist die Funktion $z_\nu(a\,k)$, der eine besondere physikalische Bedeutung zukommt, durch die Gl. (4.1a) definiert. Bei diesem Aufbau von $z_\nu(a\,k)$ würde sich zwar die Gl. (4.1) auch ohne Einführung dieser besonderen Größe nicht unübersichtlicher schreiben. Wir werden jedoch trotzdem die gewählte Schreibweise beibehalten. Die Gl. (4.1) ist im übrigen gültig für alle $r > a$ und für alle ϑ in dem abgeschlossenen Winkelbereich $0 \cdots \alpha$. Der Öffnungswinkel α selbst kann in (4.1) ein beliebiger Winkel zwischen 0 und 180° sein. Das erste Glied in der geschweiften Klammer ist absichtlich als einzelnes Glied stehengelassen worden, wenngleich es auch hier im Sinne der Vereinbarung der Gl. (3.8) in die Summe hätte mit einbezogen werden können.

Nach (4.2) setzt sich das gesamte Druckfeld des vibrierenden Ringes einer Kugelkappe aus unendlich vielen einzelnen Druckwellen zusammen, die alle den Charakter fortschreitender Wellen haben. Die Grundwelle, die durch das erste Glied in der geschweiften Klammer von (4.1) dargestellt wird, ist für alle $r \geq a$ eine reine Kugelwelle, die sich von Anfang an mit der dem Medium eigenen Geschwindigkeit ausbreitet. Der von ihr mitgeführte Druck hängt nur von r ab. Die Flächen konstanten Druckes in dieser Welle sind also Kugelflächen, und diejenigen unter ihnen, auf denen der Druck verschwindet, stehen durchweg um eine halbe Wellenlänge voneinander ab.

Bei den Oberwellen des Druckes ist neben der Abhängigkeit von r auch eine Abhängigkeit von ϑ vorhanden. Da für die erste Oberwelle die Funktion $\mathrm{P}_\nu^{-1}(\cos\vartheta)$ sowohl für $\vartheta = 0$ als auch für $\vartheta = \alpha$ verschwindet, sonst aber nirgends, so wechselt $\mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta)$ beim Übergang von $\vartheta = 0$ zu $\vartheta = \alpha$ sein Vorzeichen gerade einmal. Bei der p-ten Oberwelle mit $\nu = n_{p,-1}$ tritt dieser Vorzeichenwechsel im ganzen p-mal auf. Bei einer Welle dieser Ordnung existieren also im ganzen p Kegelflächen, auf denen der Druck verschwindet. Die Öffnungswinkel dieser Kegel sind die Nullstellen der Funktion $\mathrm{P}_{n_{p,-1}}(\cos\vartheta)$ in bezug auf $\cos\vartheta$. Da $\mathfrak{v}_\vartheta$ gemäß Gl. (1.2) u. a. gewiß auch für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \alpha$ verschwindet, so stehen die Flächen konstanten Druckes stets senkrecht zur Kegelachse und zum Kegelmantel. Sie verlaufen aber auch senkrecht zu allen denjenigen Kegelflächen, für deren Öffnungswinkel $\mathrm{P}_{n_{p,-1}}^{-1}(\cos\vartheta)$ verschwindet.

Das Verhalten des Drucks in bezug auf r ergibt sich bei den Oberwellen gemäß (4.1) aus einer Betrachtung der Phase der Funktion $\zeta_\nu^{(1)}(r\,k)$. Für ein $r\,k \gg \nu + 1/2$, d. h. in der Wellenzone der betreffenden Oberwelle, gilt nun bekanntlich für den Arkus dieser Funktion die Relation (4.2). Für ein gegenüber $\nu + 1/2$ großes $r\,k$ verschwindet also auch bei jeder Oberwelle der von ihr mitgeführte Druck auf Kugelflächen, deren Abstände sich mit wachsendem $r\,k$ von größeren Werten her mehr und mehr einer halben Wellenlänge nahekommen. Aus diesen Überlegungen ergibt sich z. B. für die erste Oberwelle der in Abb. 5 schematisch dargestellte Drucklinienverlauf.

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(r\,k) &= \arc\zeta_\nu^{(1)}(r\,k) \\ &\sim r\,k \cdot \left\{ \sin\varepsilon - \varepsilon\cdot\cos\varepsilon - \frac{1 + \frac{5}{3}\cdot\operatorname{ctg}^2\varepsilon}{8\cdot\sin\varepsilon\cdot(r\,k)^2} \cdots \right\} \\ \cos\varepsilon &= \left(\nu + \frac{1}{2}\right)/r\,k \ll 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Für die Phasengeschwindigkeit, mit der die Druckwellen verschiedener Ordnung im Kegel fortschreiten, läßt sich wenigstens für die

Wellenzone gleichfalls eine übersichtliche Beziehung aufstellen. Aus (4.2) folgt nämlich sofort durch eine Differentiation nach der Zeit die Beziehung (4.3), aus der hervorgeht,

$$dr/dt = c/\varphi_\nu'(r\,k)$$

$$\approx c\cdot\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{r\,k}\right)^2+\cdots\right\} \tag{4.3}$$

daß sich auch im Hinblick auf die Geschwindigkeit mit wachsenden Abständen von der Kegelspitze das Verhalten der Oberwellen mehr und mehr dem der Grundwelle nähert. In weniger präziser Form, aber übersichtlicher

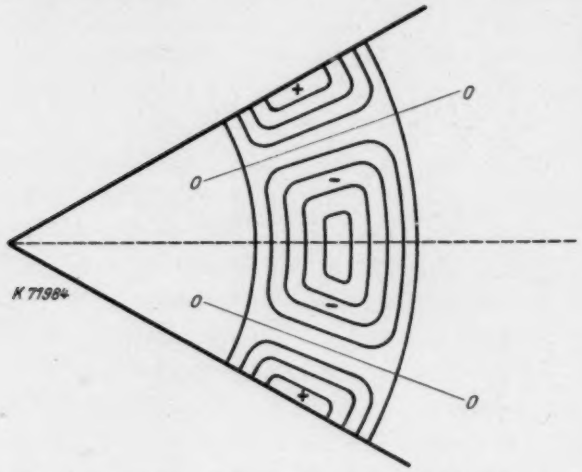


Abb. 5. Der Verlauf der Linien gleichen Schalldrucks bei der ersten räumlichen Oberwelle mit $\nu = n_{1,-1}$ in Gl. (4.1)

geht das Verhalten der Phasengeschwindigkeit der einzelnen Oberwellen aus Abb. 6 hervor, das den Gang der Phase $\varphi_\nu(r\,k)$ mit $r\,k$ für verschiedene Werte von ν darstellt. Je größer ν und je kleiner also der Öffnungswinkel des Kegels ist, um so später biegt nach dieser Abbildung der Verlauf von φ_ν in eine Gerade ein.

Sehr aufschlußreich ist der Ausdruck (4.4) für die auf die Flächeneinheit bezogene akustische Impedanz der einzelnen Teilwellen, den sog. Schallwellenwiderstand. Er hängt weder von den Daten der Schallanregung ab,

$$p^{(\nu)}/v_r^{(\nu)} = \mathrm{i}\,\varrho_0\,c/\left\{\frac{d}{d\,x}\ln\zeta_\nu^{(1)}(x)\right\}_{x=r\,k} = \varrho_0\,c\cdot z_\nu(r\,k) \tag{4.4}$$

noch von der Koordinate ϑ. Für die kleineren ganzzahligen Werte von ν kann z_ν explizite angegeben werden, ohne daß die Formeln zu umfangreich werden. So erhält man für die Grundwelle in Gl. (4.1) mit $\nu = 0$ die Beziehung

$$z_0(x) = \frac{x^2 - x\,\mathrm{i}}{1+x^2}. \tag{4.51}$$

Für $\nu = 1$ und $\nu = 2$ ergeben sich die Formeln

$$z_1(x) = \frac{x^4 - \mathrm{i}\cdot x\,(2+x^2)}{x^4+4}, \tag{4.52}$$

$$z_2(x) = \frac{x^6 - \mathrm{i}\,(x^5+6\,x^3+27\,x)}{x^6 - 2\,x^4 + 9\,x^2 + 81}. \tag{4.53}$$

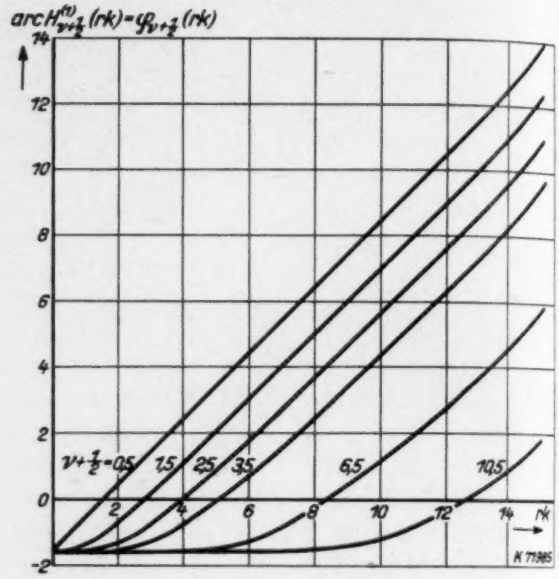


Abb. 6. Der Verlauf von arc $H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(r\,k)$ mit $r\,k$ für verschiedene Werte von ν

In allen diesen Fällen hat also der Schallwellenwiderstand für kleine Werte von $x = r\,k$ den Charakter eines Trägheitswiderstandes. Für $x \to \infty$ hingegen strebt er gegen den reellen Schallwellenwiderstand $\varrho_0 \cdot c$. Dasselbe Verhalten zeigt er auch bei beliebigen reellen Werten von ν. Da die Größe z_ν nicht bloß eine willkürliche Hilfsgröße ist, sondern nach Gl. (4.2) in den Schlußformeln als Rechengröße mit einer bestimmten physikalischen Bedeutung auftritt, so ist es auch erwünscht, im allgemeinen Falle ihre Berechnung durchführen zu können. Das ist in der Tat für größere Werte von ν, etwa von $\nu = 10$ ab, ohne große Schwierigkeit möglich, und damit also für denjenigen Bereich von ν, der gerade bei flacheren Kegeln von Bedeutung ist.

Bei der Angabe dieser Formeln sind nach DEBYE drei Bereiche zu unterscheiden. Ist zunächst einmal $\nu + 1/2 \ll r\,k$, so gilt die Näherungsformel:

$$z_\nu(r\,k) \sim \Big\{\sin\varepsilon + \mathrm{i}\cdot\frac{1+\sin^{-2}\varepsilon}{2\,r\,k} + \frac{1+5\,\mathrm{ctg}^2\,\varepsilon}{2\cdot(2\,\nu+1)^2\cdot\sin\varepsilon}\cdot\mathrm{ctg}^2\,\varepsilon - \mathrm{i}\cdot\mathrm{ctg}^3\,\varepsilon \times \frac{5\,\mathrm{ctg}^2\,\varepsilon + (1+\cos^2\varepsilon)\,(1+5\,\mathrm{ctg}^2\,\varepsilon)}{(2\,\nu+1)^3\cdot\sin^3\varepsilon}\cdots\Big\}^{-1} \tag{4.61}$$

$$\cos\varepsilon = \left(\nu+\frac{1}{2}\right)/r\,k\,.$$

Die im entgegengesetzten Fall $\nu + 1/2 \geqslant r\,k$ gültige Formel geht aus (4.61) hervor, indem man ε durch $\mathrm{i}\cdot\delta$ ersetzt. Dann hat man

$$z_\nu(r\,k) \sim -\mathrm{i}\cdot\Big\{\mathfrak{Sin}\,\delta + \frac{1-\mathfrak{Sin}^{-2}\,\delta}{2\,r\,k} - \frac{5\,\mathfrak{Cotg}^2\,\delta - 1}{2\cdot(2\,\nu+1)^2\cdot\mathfrak{Sin}\,\delta}\cdot\mathfrak{Cotg}^2\,\delta - \mathfrak{Cotg}^3\,\delta \times \frac{5\,\mathfrak{Cotg}^2\,\delta + (1+\mathfrak{Cof}^2\,\delta)\,(5\,\mathfrak{Cotg}^2\,\delta - 1)}{(2\,\nu+1)^3\cdot\mathfrak{Sin}^3\,\delta}\cdots\Big\}^{-1} \tag{4.62}$$

$$\mathfrak{Cof}\,\delta = \left(\nu+\frac{1}{2}\right)/r\,k\,.$$

Die beiden Gl. (4.61) und (4.62) bestätigen die Richtigkeit der früheren Behauptung, daß auch bei beliebigen ν-Werten für $r\,k \to \infty$ der durch (4.4) definierte Widerstand gegen den reellen Widerstand $\varrho_0\cdot c$ geht, während er für $r\,k \to 0$ einem selbst verschwindenden rein induktiven Widerstand zustrebt. Gleichzeitig ersehen wir aber aus diesen Formeln, daß sie gerade das Übergangsgebiet zwischen diesen beiden Grenzfällen nicht beherrschen. Tatsächlich vollzieht sich dieser Übergang hauptsächlich in dem Bereich $r\,k \approx \nu + 1/2$. Das gilt nach Abb. 7 auch in den durch die Gl. (4.51) bis (4.53) erfaßten Fällen. Benutzen wir in diesem Gebiet zur Approximation der Funktion $\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1/2}(r\,k)$ die Funktion $\mathrm{H}_{1/2}$, so gelangen wir zu den folgenden beiden Formeln:

$$z_\nu(r\,k) \approx \mathrm{i}\cdot 2\,r\,k\cdot\Big\{-1 - 6\,w\,\mathrm{i} + \frac{6\,w}{\sin^2\varepsilon}\cdot e^{2\pi\mathrm{i}/3}\cdot\frac{\mathrm{H}^{(1)}_{2/3}(w)}{\mathrm{H}^{(1)}_{1/3}(w)}\Big\}^{-1} \tag{4.631}$$

$$w = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{3}\cdot\left[\left(\frac{r\,k}{\nu+\frac{1}{2}}\right)^2 - 1\right]^{3/2} = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{3}\cdot\mathrm{tg}^3\,\varepsilon \qquad \left(r\,k \geq \nu+\frac{1}{2}\right),$$

$$z_\nu(r\,k) \approx \mathrm{i}\cdot 2\,r\,k\cdot\Big\{-1 - 6\,w'\cdot\mathrm{i} + \frac{6\,w'}{\mathfrak{Sin}^2\,\delta}\cdot e^{5\pi\mathrm{i}/6}\cdot\frac{\mathrm{H}^{(2)}_{2/3}(\mathrm{i}\,w')}{\mathrm{H}^{(2)}_{1/3}(\mathrm{i}\,w')}\Big\}^{-1} \tag{4.632}$$

$$w' = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{3}\cdot\left[1 - \left(\frac{r\,k}{\nu+\frac{1}{2}}\right)^2\right]^{3/2} = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{3}\cdot\mathfrak{Tg}^3\,\delta \qquad \left(r\,k \leq \nu+\frac{1}{2}\right).$$

Auch hier geht wieder die zweite Formel aus der ersten hervor durch den Ersatz von ε durch $\mathrm{i}\cdot\delta$. Für $r\,k = \nu + 1/2$ ergibt sich aus beiden Gleichungen übereinstimmend der Ausdruck:

$$z_\nu\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \approx 2\,\mathrm{i}\cdot\Big\{-\frac{1}{\nu+\frac{1}{2}} + \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}\times\left(\frac{6}{\nu+\frac{1}{2}}\right)^{1/3}\cdot(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})\Big\}^{-1}\,. \tag{4.63}$$

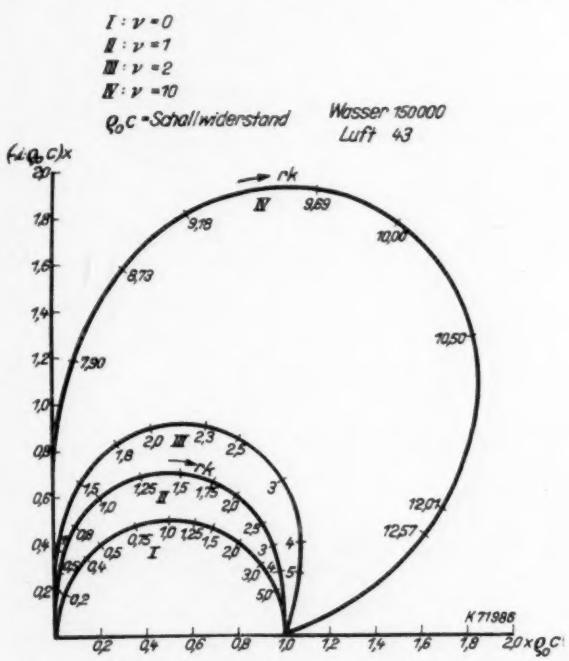


Abb. 7. Der Veriauf des Schallwellenwiderstandes $c\,\varrho_0\cdot z_\nu(r\,k)$ mit $r\,k$ für verschiedene Werte von ν

Mit Hilfe der beiden Gleichungsgruppen (4.5) und (4.6) wurde in Abb. 7 der Verlauf des Schallwellenwiderstandes mit $r\,k$ für die ν-Werte 0, 1, 2 und 10 in Form eines Vektordiagramms dargestellt. Der Fall $\nu = 0$ entspricht, wie schon erwähnt, der Grundwelle in Gl. (4.2). Er gibt gleichzeitig den Schallwellenwiderstand

einer atmenden Kugel an, die unbehindert nach allen Seiten in den freien Raum ausstrahlt. Die Fälle $\nu = 1$, 2 und 10 entsprechen den Schallwellenwiderständen der jeweils ersten Oberwellen des Drucks bei den Öffnungswinkeln $\alpha = 180^0$, 90^0 und 21^0 und bei einer Schallerregung, wie sie der Gl. (4.2) zugrunde liegt.

Die vorstehend beschriebenen Druckwellen höherer Ordnung zeigen eine weitgehende Analogie mit den elektromagnetischen Wellen in einem Kegelhorn, und zwar mit demjenigen Typus dieser Wellen, bei denen das elektrische Feld in Kreisen um die Kegelachse verläuft, die alle in Ebenen senkrecht zu dieser Achse liegen. Ein solches Strahlungsfeld läßt sich in einem Kegel mit vollkommen leitenden Mantelflächen durch einen Stromring erzeugen, der in der gleichen Weise angeordnet ist wie die ringförmige Schallquelle von Abb. 1. Die Kraftlinien des magnetischen Feldes zeigen bei einer solchen Welle in einem Meridianschnitt denselben Verlauf wie die Stromlinien der Schnelle. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den elektromagnetischen und akustischen Wellen in einem Horn besteht jedoch in dem Fehlen der Grundwelle im elektromagnetischen Wellenfeld.

Wir schließen damit die Erörterung im Anschluß an die allgemeine Lösungsgl. (4.2) ab. Wir werden sie noch nach einigen Punkten ergänzen, nachdem wir sie auf den Fall einer im ganzen schwingenden Kugelkappe spezialisiert haben.

5. Die radial schwingende Kugelkappe

Bei der Anregung der Schallbewegung im Kegel durch eine Kugelkappe wird in der Regel diese Kappe als Ganzes schwingen. Die Schwingungsbewegung der ganzen Kappe kann auf verschiedene Weise realisiert werden. Wir untersuchen an erster Stelle den Fall, daß der innerhalb des Kegelkopfes gelegene Teil der Kappe gemäß Abb. 8 in radialer Richtung schwingt. Bei einem derartigen Schwingungszustand läßt sich die Kappe in Ringgebiete unterteilen, für die V_n stets den gleichen Wert V_r hat. Wir erhalten daher das Druckfeld einer solchen Kugelkappe, indem wir die Gl. (4.2) zwischen den Grenzen 0 und α über ϑ' integrieren. Es ist aber

$$(5.1) \qquad \int_0^{\alpha} \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' = 2 \cdot \sin^2(\alpha/2),$$

$$(5.2) \qquad \int_0^{\alpha} \sin\vartheta' \cdot P_\nu(\cos\vartheta') \cdot d\vartheta' = \sin\alpha \cdot P_\nu^{-1}(\cos\alpha) = 0,$$

falls in (5.2) $n = \nu$ eine der Wurzeln der Gleichung $P_n^{-1}(\cos\alpha) = 0$ ist.

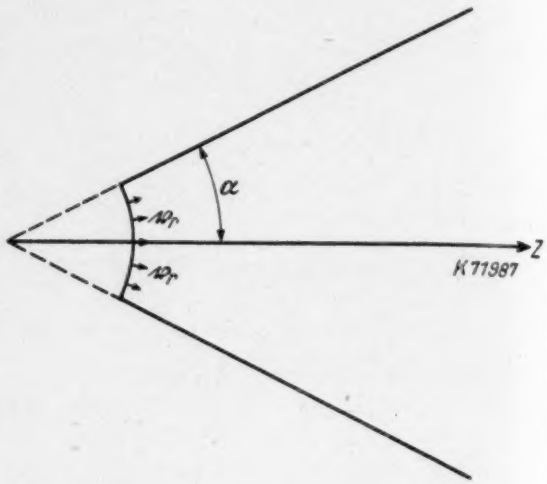


Abb. 8. Die radial schweigende Kugelkappe im Kegelhorn

Das Druckfeld einer in einem Kegelkopf angeordneten, radial schwingenden Kugelkappe ist demnach durch die einfache Beziehung gegeben:

$$(5.3) \qquad p(r,\vartheta)/(\varrho_0 c \cdot V_r) = -i \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{ak \cdot (1+i \cdot ak)}{1+a^2k^2} \times e^{ik(r-a)} = \frac{a}{r} \cdot e^{ik(r-a)} \cdot z_0(ak).$$

Das ist die gleiche Formel, wie sie etwa für das Druckfeld eines Kugelstrahlers nullter Ordnung gilt, der frei nach allen Seiten in den Raum hinausstrahlt.

6. Die axial schwingende Kugelkappe

Praktisch bedeutsamer ist der Fall der axial schwingenden Kugelkappe. Nach Abb. 9 ist hierfür in Gl. (4.2) $V_n = V_z \cdot \cos\vartheta'$ zu setzen und hinterher wieder über ϑ' von 0 bis α zu

integrieren. Nun ist für jedes beliebige n

$$\int_{\cos\alpha}^{1} x \cdot P_n(x) \cdot dx = -\frac{\sin\alpha}{(n-1)(n+2)} \times \{\sin\alpha \cdot P_n(\cos\alpha) + \cos\alpha \cdot P_n^{+1}(\cos\alpha)\} \tag{6.1}$$

und mithin für ein $n = \nu$

$$\int_{0}^{\alpha} \sin\vartheta' \cdot \cos\vartheta' \cdot P_\nu(\cos\vartheta') \cdot d\vartheta' = -\frac{\sin^2\alpha}{(\nu-1)(\nu+2)} \cdot P_\nu(\cos\alpha) . \tag{6.1a}$$

Außerdem ist nach bekannten Regeln

$$\int_{0}^{\alpha} \cos\vartheta' \cdot \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' = 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} . \tag{6.2}$$

Das Druckfeld einer Kugelkappe vom Öffnungswinkel α, die innerhalb eines unendlich langen Kegels vom gleichen Öffnungswinkel in axialer Richtung schwingt, befolgt darnach das Gesetz:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}(r,\vartheta)/(c\,\varrho_0 \cdot V_z) &= \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a}{r} \cdot e^{ik(r-a)} \cdot z_0(ak) \\ &- \sin\alpha \cdot \sum_{\nu=n_{q,-1}}^{q=1,\infty}{}' \frac{2\nu+1}{(\nu-1)\cdot\nu\cdot(\nu+1)(\nu+2)} \\ &\times \frac{\zeta_\nu^{(1)}(rk)}{\zeta_\nu^{(1)}(ak)} \cdot z_\nu(ak) \cdot \frac{P_\nu(\cos\vartheta)}{(\partial P_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu}} . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Die Gl. (6.3) gilt für jeden Öffnungswinkel α zwischen 0^0 und 180^0. Aus der großen Mannigfaltigkeit der Fälle, die demnach die Formel (6.3) überdeckt, heben wir hier zwei besonders heraus, nämlich die Fälle $\alpha = 180^0$ und $\alpha = 90^0$.

Für einen Öffnungswinkel $\alpha = 180^0$ handelt es sich offenbar um eine in axialer Richtung schwingende volle Kugel, die in den freien Raum hinausstrahlt. Für $\alpha = \pi$ verschwindet aber in (6.3) das Glied der ersten Zeile und von der unendlichen Summe, in der die ν für $\alpha = \pi$ nach Abb. 3 die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchlaufen, fallen alle Glieder bis auf das erste fort, und zwar nicht nur wegen $\sin\pi = 0$, sondern auch wegen des über alle Grenzen wachsenden Wertes von $P_n^{-1}(\cos\pi)$. Die Ausnahme, die hiervon das erste Glied der Summe macht, kommt durch den Faktor $\nu - 1$ zustande. Für $\alpha = \pi$ gilt nämlich für die kleinste Wurzel von $P_n^{-1}(\cos\alpha) = 0$ nach Macdonald [8] die Grenzgleichung (6.4).

$$\nu \to 1 + 2 \cdot \mathrm{ctg}^2(\alpha/2) \qquad (\alpha \to \pi) , \tag{6.4}$$

$$(\partial P_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=1} = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha \cdot \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right) . \tag{6.5}$$

Beachtet man überdies die Gl. (6.5), so entsteht für das Druckfeld einer im freien Raum axial schwingenden Kugel die Beziehung:

$$\mathfrak{p}(r,\vartheta)/(c\,\varrho_0 \cdot V_z) = \zeta_1^{(1)}(rk)/\zeta_1^{(1)}(ak) \times z_1(ak) \cdot \cos\vartheta . \tag{6.6}$$

Bei einem Öffnungswinkel $\alpha = 90^0$ wird die Schallquelle gebildet von einer in der kreisrunden Öffnung eines unendlichen Schirmes

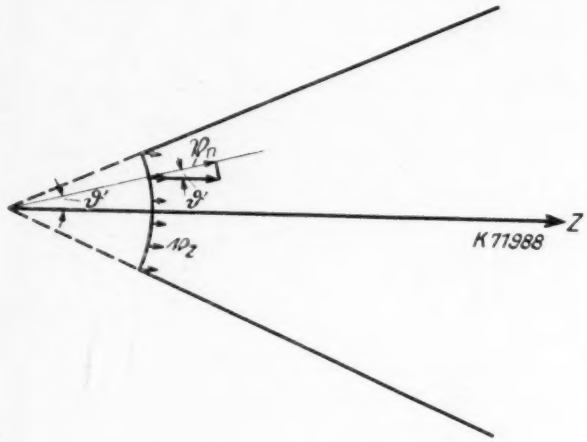


Abb. 9. Die axial schwingende Kugelkappe im Kegelhorn

senkrecht zur Schirmebene hin- und herschwingenden Kugel. Nach Abb. 3 durchläuft der Zeiger ν in diesem Falle alle von Null verschiedenen geraden ganzen Zahlen. In Rücksicht auf die Gl. (6.7) und (6.7a) gilt demnach für das Druckfeld einer senkrecht zu einer unendlichen Lochscheibe schwingenden Kugel

$$\frac{\partial P_n^{-1}(0)}{\partial n} = \pi^{1/2}/4 \cdot \left\{\Psi\left(1-\frac{n}{2}\right) - \Psi(n+3/2)\right\} \Big/ \left\{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\right\} \quad (n \text{ beliebig}) \tag{6.7}$$

$$\left(\frac{\partial P_n^{-1}(0)}{\partial n}\right)_{n=2q} = (-)^q \cdot 2^{2q-1} \times (q-1)!\,q!/(2q+1)! \quad (q = 1, 2, 3 \ldots) \tag{6.7a}$$

der Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
p\,(r,\vartheta)/(\varrho_0 c\cdot V_z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{r}\cdot e^{\mathrm{i}k(r-a)}\cdot z_0\,(a\,k)\\
&\quad -2\cdot\sum_{q=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^q\cdot \mathrm{P}_{2q}\,(\cos\vartheta)\\
&\quad\times\frac{\left(2q+\frac{1}{2}\right)(2q-2)!}{(q-1)!\,(q+1)!}\cdot\frac{\zeta_{2q}^{(1)}\,(r\,k)}{\zeta_{2q}^{(1)}\,(a\,k)}\cdot z_{2q}\,(a\,k)\,.
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Schließlich können wir noch ohne Schwierigkeit mit Hilfe der Gl. (6.3) die von der vibrierenden Kugelkappe abgestrahlte Schalleistung berechnen. Dazu brauchen wir nur die durch Gl. (6.9) angegebene Integration durchzuführen, wobei zu beachten ist, daß nach Voraussetzung $\mathfrak{v}_r\,(a,\vartheta) = V_z\cdot\cos\vartheta$ ist. Die statthafte gliedweise Integration der Reihe führt wieder zu den schon oben benutzten Integralen

$$
L = 2\pi a^2\cdot\int_{\cos\alpha}^{1} p\,(a,\vartheta)\cdot\overline{\mathfrak{v}_r\,(a,\vartheta)}\cdot d\,(\cos\vartheta)
\tag{6.9}
$$

von Gl. (6.1a) und (6.2). Für die insgesamt von der Kugelkappe abgestrahlte Schalleistung ergibt sich damit die Beziehung:

$$
\begin{aligned}
L &= 2\pi a^2\cdot c\,\varrho_0\cdot V_z^2\cdot\Big\{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^4\frac{\alpha}{2}\\
&\quad\times z_0\,(a\,k)+2\cdot\sin^3\alpha\\
&\quad\times\sum_{\nu=n_{q,-1}}^{q=1,\infty}\frac{\nu+\frac{1}{2}}{(\nu-1)^2\cdot\nu\cdot(\nu+1)\,(\nu+2)^2}\cdot z_\nu\,(a\,k)\\
&\quad\times\frac{\mathrm{P}_\nu\,(\cos\alpha)}{(\partial\,\mathrm{P}_n^{-1}\,(\cos\alpha)\,(\partial n)_{n=\nu}}\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Dieser Ausdruck ist wegen des Faktors z_ν im allgemeinen komplex. Sein reeller Bestandteil ergibt die wirkliche, von der Schallwelle entführte Strahlungsleistung, sein imaginärer Bestandteil die infolge der Phasenverschiedenheit von Druck und Geschwindigkeit aufzuwendende Blindleistung. Bei den im allgemeinen üblichen kleinen Öffnungswinkeln kegelförmiger Trichter ist nach Abb. 3 auch der kleinste Wert von ν schon eine große Zahl, die in der Größenordnung von 10 und darüber liegt. Nach Gl. (6.3) und mehr noch nach Gl. (6.10) sind daher die Glieder der unendlichen Summe zumeist vernachlässigbar klein gegenüber dem außerhalb des Summenzeichens stehenden Gliede, das der Grundwelle des Schalles entspricht. Bei flachen Kegeln ist im unteren Frequenzbereich in der Regel auch $a\,k \ll \nu_1 - 1/2$. Nach Gl. (4.62) ist unter diesen Umständen z_ν im wesentlichen rein imaginär, so daß das Summenglied in (6.10) die reelle Schalleistung sowieso nicht beeinflußt. Auf Grund dieser Ergebnisse kann daher bei der hier gewählten Anregung des Schalles bei flachen Kegeln und niedrigen Frequenzen, wie das in der elementaren Theorie der Horne auch geschieht, von dem komplizierten Summenglied ganz abgesehen werden.

Wir wollen diese Erkenntnis auch noch zahlenmäßig an dem Beispiel eines Kegeltrichters belegen, der einen Öffnungswinkel von $\alpha = 16{,}274^0$ hat, und wollen feststellen, welchen Einfluß die erste Oberwelle auf die an der Oberfläche der Kugelkappe herrschende Druckverteilung hat. Für kleine Öffnungswinkel α läßt sich der zugehörige Wert von ν mit ausreichender Annäherung mit Hilfe der Gl. (6.11) ermitteln.

$$
\begin{aligned}
2\,\nu_1+1 &= \frac{3{,}83171}{\sin(\alpha/2)}\cdot\Big\{1-0{,}13261\\
&\quad\times\sin^2\frac{\alpha}{2}-0{,}03047\cdot\sin^4\frac{\alpha}{2}\ldots\Big\}\,.\\
3{,}83171 &= j_{1,1}
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

In unserem Fall ergibt sich daraus für ν_1 der Zahlenwert 13. Die beiden nächsten Wurzeln, für deren Berechnung sich ähnliche Formeln angeben lassen, haben die Werte $\nu_2 = 24{,}205$ und $\nu_3 = 35{,}322$. Je größer die Ordnung der ν ist, um so mehr nähert sich übrigens die Differenz zweier aufeinanderfolgender Wurzeln dem Betrage π/α, d. h. in unserem Falle dem Werte 11,061. Für ein $a\,k = 1$ erhält man ferner nach Gl. (4.62) $z_{\nu_1}\,(a\,k) = \mathrm{i}/13{,}961$. Schließlich ergibt sich nach den maßgebenden Formeln [9, Anhang]

$$
(\partial\,\mathrm{P}_n^{-1}\,(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu_1} = -\,0{,}00854\,.
$$

Mit Einschluß des ersten Summengliedes ist daher gemäß Gl. (6.2):

$$
\begin{aligned}
p\,(a,\vartheta)/(c\,\varrho_0\cdot V_z) &= 0{,}4900\\
&\quad-\mathrm{i}\,(0{,}4900+0{,}0006\cdot\mathrm{P}_{13}\,(\cos\vartheta))\,.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Die Schwankungen der Blindkomponente des Drucks, die durch die erste Oberwelle erzeugt werden, machen also in dem angegebenen Falle

im Maximum nur 0,127% der gleichartigen Druckkomponente der Grundwelle aus.

Das starke Zurücktreten der Oberwellen gemäß (6.12) ist aber auch bei flachen Hörnern nicht wahrzunehmen, sobald entweder eine andere Bewegung der Kugelkappe dem Entstehen der Oberwellen Vorschub leistet oder unter sonst gleichen Umständen eine höhere Frequenz ins Spiel kommt. Die erste Möglichkeit und ihre Folgen werden wir im Abschnitt 8 an einem anderen Beispiel erörtern. Die Wirkung einer höheren Frequenz läßt sich unmittelbar an dem obigen Beispiel erkennen. In der Beziehung für den Druck an der Oberfläche der Kappe ist nämlich das einzige von der Frequenz abhängende Glied der Faktor $z_\nu(a\,k)$. Hat aber ak wegen einer höheren Frequenz nicht den Wert 1, sondern etwa den Wert 50, so hat $z_{13}(a\,k)$ nach Abb. 7 bereits den Wert 1 erreicht. Die Korrekturglieder in (6.12) haben dann also absolut genommen die 13,96fache Größe. Außerdem beeinflussen sie nicht mehr die Blindkomponente des Drucks gegenüber der Geschwindigkeit, sondern die Wirkkomponente. Die Zunahme, die aus demselben Grunde die absolute Größe von $z_0(a\,k)$ erfährt, beträgt dagegen nur das $\sqrt{2}$fache. Im ganzen tritt also in dem betrachteten Beispiel bei hohen Frequenzen die erste Oberwelle mit rund dem 10fachen ihres bisherigen Absolutbetrages in Erscheinung.

7. Die Kugelkappe mit beliebiger axialsymmetrischer Geschwindigkeitsverteilung

In den beiden voranstehenden Abschnitten wurden über die Bewegung der Kugelkappe am verjüngten Ende des Kegels die einfachsten Voraussetzungen gemacht, die möglich sind. Wird auch weiterhin an der Annahme festgehalten, daß die Verteilung der Normalgeschwindigkeiten der einzelnen Flächenelemente über die Kugelkappe stets axialsymmetrisch ist, so läßt sich auch der allgemeinere Fall einer in Richtung der Variabelen ϑ' beliebigen Geschwindigkeitsverteilung beherrschen. Dies gelingt dadurch, daß man die Normalgeschwindigkeit als Funktion von ϑ' in zweckmäßiger Weise in eine Reihe von Eigenfunktionen entwickelt, die nicht der Kugel, sondern der Kugelkappe zugeordnet sind. Dazu eignen sich die Kugelfunktionen vom Range 0, deren Grad mit Einschluß der Null durch die unendlich vielen Wurzeln der Gleichung $P_n^{-1}(\cos\alpha) = 0$ gegeben ist.

Dementsprechend stellen wir zunächst rein formal die Normalgeschwindigkeit $V_n(\vartheta')$ durch die unendliche Reihe (7.1) dar, in der die v_ν

$$V_n(\vartheta') = \sum_{\nu=0,\,n_p,\,-1}^{p=1,\,\infty} v_\nu \cdot P_\nu(\cos\vartheta') \tag{7.1}$$

vorerst noch unbekannte Koeffizienten sind. Darnach multiplizieren wir diese Reihe mit $P_\nu(\cos\vartheta')\cdot\sin\vartheta'$ und integrieren gliedweise über ϑ' zwischen den Grenzen 0 und α[2]). Um die dabei auf der rechten Seite von (7.1) entstehenden Integrale über das Produkt zweier Kugelfunktionen angeben zu können, gehen wir von den beiden Gl. (7.2) und (7.3) aus, die für beliebige Werte von n und r gelten

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left[P_r(x)\frac{d\,P_n(x)}{dx} - P_n(x)\frac{d\,P_r(x)}{dx}\right]\right\} + (n-r)(n+r+1)\cdot P_n(x)\,P_r(x) = 0 \tag{7.2}$$

$$\frac{d\,P_r(x)}{dx} = r\cdot(r+1)\cdot\frac{P_r^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{7.3}$$

und die in der Theorie der Kugelfunktionen bewiesen werden. Integrieren wir die erste dieser Gleichungen nach x zwischen den Grenzen 1 und $\cos\alpha$ und berücksichtigen dabei die zweite Gleichung, so ergibt sich sofort die weitere Beziehung:

$$\begin{aligned}(n-r)(n+r+1)\cdot\int_{\cos\alpha}^{1} P_n(x)\,P_r(x)\cdot dx \\ = \sin\alpha\cdot\{n(n+1)\,P_r(\cos\alpha)\,P_n^{-1}(\cos\alpha) \\ - r\cdot(r+1)\cdot P_n(\cos\alpha)\,P_r^{-1}(\cos\alpha)\}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Sind nun in (7.4) n und r zwei verschiedene Wurzeln ν_1 und ν_2 der Gleichung $P_n^{-1}(\cos\alpha)=0$, so entsteht die Beziehung (7.5a), die den orthogonalen Charakter der Funktionen $P_\nu(\cos\alpha)$ beweist.

$$\int_{\cos\alpha}^{1} P_{\nu_1}(x)\,P_{\nu_2}(x)\cdot dx = 0. \tag{7.5a}$$

[2]) Die Zulässigkeit dieser Operation folgt aus den allgemeinen Lehrsätzen aus der Theorie der Eigenfunktionen.

Sind aber n und r gleich einer und derselben Wurzel ν_1, so nehmen wir zunächst noch r als ein wenig verschieden von ν_1 an, indem wir etwa $r = \nu_1 + \delta n$ setzen. Läßt man dann δn zur Grenze Null gehen, so entsteht als Gegenstück zu Gl. (7.5a) die Formel:

$$\int_{\cos\alpha}^{1} [\mathrm{P}_{\nu_1}(x)]^2 \cdot dx = \sin\alpha \cdot \frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2\nu_1+1} \times \mathrm{P}_{\nu_1}(\cos\alpha) \cdot \left(\frac{\partial \mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)}{\partial n}\right)_{n=\nu_1} . \tag{7.5b}$$

Für die Reihenkoeffizienten v_ν der Gl. (7.1) ergibt sich damit allgemein das Bildungsgesetz (7.6a), das für den ersten Reihenkoeffizienten $\nu = 0$ in die einfachere Gl. (7.6b) entartet. Wir können darnach für eine gegebene Ge-

$$v_\nu = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu\cdot(\nu+1)} \cdot \{\mathrm{P}_\nu(\cos\alpha) \times (\partial \mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu}\}^{-1} \times \int_0^\alpha V_n(\vartheta')\,\mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta')\sin\vartheta' \cdot d\vartheta' , \tag{7.6a}$$

$$v_0 = \left(1/2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \int_0^\alpha V_n(\vartheta') \cdot \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' \tag{7.6b}$$

schwindigkeitsverteilung $V_n(\vartheta')$ die Koeffizienten v_ν in der Entwicklung (7.1) als gegeben ansehen.

Das Druckfeld, das zu der mit der Geschwindigkeitsverteilung $V_n(\vartheta')$ von (7.1) vibrierenden Kugelkappe gehört, folgt nun sofort aus Gl. (4.2), wenn wir darin V_n durch den Ausdruck (7.1) ersetzen und in dem Bereich $0 \cdots \alpha$ über ϑ' integrieren. Die nochmalige Berücksichtigung der Gl. (7.5) liefert dann für das Druckfeld der nach dem Gesetz $V_n(\vartheta')$ axial symmetrisch schwingenden Kugelkappe die folgende Beziehung:

$$p(r,\vartheta) = c\varrho_0 \cdot \sum_{\nu=n_{q,-1}}^{q=0,\infty} v_\nu \cdot z_\nu(ak) \times \frac{\zeta_\nu^{(1)}(rk)}{\zeta_\nu^{(1)}(ak)} \cdot \mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta) \qquad (n_{0,-1} = 0) . \tag{7.7}$$

Das ist die übersichtlichste Form, in der sich die Lösung der allgemeinen Aufgabe angeben läßt. Da v_ν selbst die Dimension einer Geschwindigkeit hat, so bedeutet in (7.7) $c\varrho_0 \cdot v_\nu \cdot z_\nu(ak)$ mit $\nu = n_{p,-1}$ den Druckanteil der p-ten Oberwelle an der Oberfläche der Kappe. Der Öffnungswinkel α des Kegels, zwischen dessen Mantelflächen die ar[beitende] Kegelspitze angeordnete Kugelkappe schwingt, kann in der Gl. (7.7) jeder beliebige Winkel zwischen 0^0 und 180^0 sein. Es versteht sich von selbst, daß in der jetzigen Lösung die Lösungen der beiden in den Abschnitten 5 und 6 behandelten Aufgaben enthalten sein müssen. Davon kann man sich an Hand der Gl. (7.6a,b) sofort überzeugen, denn es ist zu diesem Zweck nur erforderlich, darin $V_n(\vartheta')$ entweder durch 1 oder durch $v_z \cdot \cos\vartheta'$ zu ersetzen. Die Gl. (5.1,2) und (6.1,2) führen dann in der Tat zu den beiden Lösungen (5.3) und (6.3) zurück. Für $\alpha = 180^0$ durchläuft der Zeiger ν alle positiven ganzen Zahlen mit Einschluß der Null. Es handelt sich dann um die Ausbreitung des Schalles von einer zwar axialsymmetrisch, aber sonst beliebig schwingenden Kugel in den freien Raum. Die allgemeine Lösung ist hierfür seit langem bekannt [3]. Sie wird jedoch zumeist in anderer Form angegeben, als es hier geschehen ist. Zu dieser älteren Schreibweise gelangt man mittels der beiden Definitionsgleichungen (7.7a) und (7.7b), die jedoch bei der üblichen Erklärung der Polynome f_n und F_n

$$e^{\pi i(n+1)/2} \cdot \zeta_n^{(1)}(z) = e^{iz}/z \cdot f_n(-iz) \tag{7.7a}$$

$$e^{\pi i(n+1)/2} \cdot \zeta_n^{(1)\prime}(z) = -e^{iz}/z^2 \cdot F_n(-iz) \tag{7.7b}$$

nur für ganzzahlige n gelten. In der Gl. (7.7) wird damit für $\nu \to n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$z_n(ak) \cdot \frac{\zeta_n^{(1)}(rk)}{\zeta_n^{(1)}(ak)} = -i \cdot \frac{ak^2}{rk} \times e^{ik(r-a)} \cdot f_n(-irk)/F_n(-iak) \tag{7.7c}$$

während die Definitionsgl. (7.6) für v_ν in Rücksicht auf (7.5b) übergehen in die einfachere Formel:

$$v_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} V_n(\arccos x) \cdot \mathrm{P}_n(x) \cdot dx \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots) . \tag{7.7d}$$

Für den allgemeineren Fall einer Kugelkappe, die innerhalb eines Kegels von beliebigem Öffnungswinkel schwingt, scheint die Lösung (7.7) neu zu sein.

Nach den Gl. (7.6a) und (7.5a,b) kommt im Kegel das Druckfeld einer der unzählig vielen Oberwellen allein zustande, wenn sich dabei die sehr kleinen Deformationen der Kugelkappe

normal zu ihrer Fläche nach dem Gesetz $P_\nu(\cos\vartheta')$ verteilen. Um einen Begriff davon zu geben, wie diese Deformationen aussehen müßten, wurde in die Abb. 10 in stark vergrößertem Maßstabe sowohl die Kontur der ruhenden wie der ausgelenkten Kugelkappe eingezeichnet. Vollziehen sich die konphasen

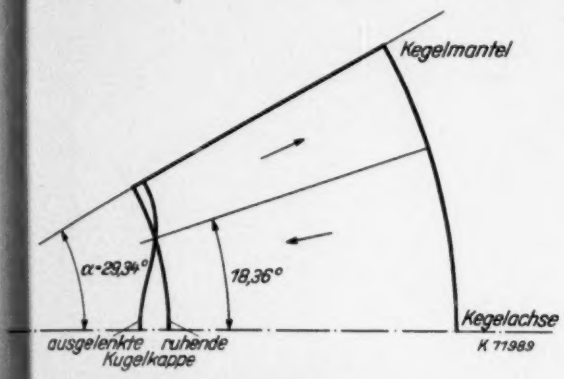


Abb. 10. In dieser Form müßte eine Kugelkappe in einem Kegelhorn schwingen, wenn nur die erste Oberwelle des Schalldrucks zustande kommen soll

Schwingungen der Kugelkappe der Amplitude wie der Verteilung nach tatsächlich in der dargestellten Weise, so entsteht dabei im Raum des Kegels allein die erste Oberwelle des Druckes. Der Öffnungswinkel α des Kegels beträgt in Abb. 10 29,34°. Hingegen erscheint von der Kugelspitze aus gesehen der stets in Ruhe befindliche einzige Knotenkreis der Kugelkappe in diesem Beispiel unter einem Winkel von 18,36°. Auf der Kegelfläche mit diesem Öffnungswinkel haben im Raum des Kegels selbst alle Masseteilchen eine verschwindende Schnellenkomponente v_r. Bei der p-ten Oberwelle sind auf der Kugelkappe im ganzen p Knotenkreise vorhanden.

7.1. Der Sonderfall des einseitig abgeschlossenen Zylinders

Es ist sehr lehrreich, zu untersuchen, welche Umwandlung die Gl. (7.7) erfährt, wenn gemäß Abb. 11 die Spitze des Kegels immer weiter nach links rückt, dabei jedoch die Kreislinie $A\,A'$ der Mantelfläche des Kegels festgehalten wird. Der Kegel geht dabei schließlich in einen Zylinder über, dessen Radius gleich dem Radius b des Kreises $A\,A'$ wird. Die früheren Kugelradien a und r werden bei diesem Grenzübergang in der Weise unendlich groß, daß ihr Produkt mit den gegen Null strebenden Winkeln α und ϑ die Gl. (7.8a,b) erfüllt. Nach Abb. 3 gehen andererseits für $\alpha \to 0$ die

$$(7.8\text{a}) \quad a \cdot \alpha \to b \qquad (7.8\text{b}) \quad r \cdot \vartheta \to \varrho$$

Wurzeln ν der Gleichung $P_\nu^{-1}(\cos\alpha) = 0$ gegen unendlich. Dies geschieht, wie auch die Gl. (6.11) erkennen läßt, in der Weise, daß dabei das Produkt $\alpha \cdot \nu$ nach Gl. (7.9) in eine der unendlich vielen Wurzeln $j_{1,p}$ der Gleichung $J_1(x) = 0$

$$(7.9) \qquad \alpha \cdot \nu \to j_{1,p} \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots)$$

übergeht. Der Abb. 12 selbst läßt sich entnehmen, daß für die endlich bleibende Differenz $r - a$ die Gl. (7.8) gilt. Ferner ist nach einer

$$(7.8) \qquad r \cdot \cos\vartheta - a \cdot \cos\alpha \to z$$

von MACDONALD [8] angegebenen Formel für sehr kleine Winkel α in erster Näherung:

$$(7.10) \qquad P_n^{-m}(\cos\alpha) \cdot \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\right\}^m \approx J_m\left((2n+1)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Daraus folgen sofort für unseren Fall die nachstehenden drei Beziehungen:

$$(7.11\text{a}) \qquad P_\nu(\cos\alpha) \to J_0(j_{1,p}),$$

$$(7.11\text{b}) \qquad P_\nu(\cos\vartheta) \to J_0(j_{1,p} \cdot \varrho/b),$$

$$(7.11\text{c}) \qquad (\partial P_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu} \to \alpha/\nu \cdot J_0(j_{1,p}).$$

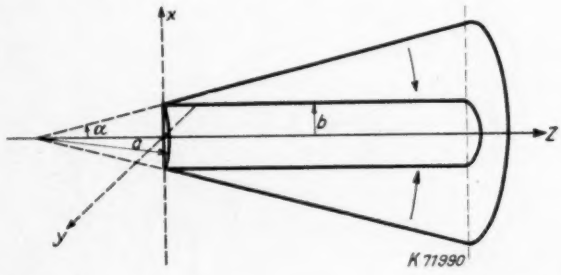


Abb. 11. Der durch eine Kugelkappe begrenzte Kegel und seine Entartungsform als Zylinder mit kreisförmiger Grundplatte

Schließlich läßt sich für große Werte von $r\,k$ und einen Wert von ν, für den etwa $\nu < r\,k$, die HANKELsche Funktion $H^{(1)}_{\nu+1/2}(r\,k)$ durch die Gl. (7.12) annähern. Da demzufolge bei dem Grenzübergang $\alpha \to 0$ der Hilfswinkel ε

Sind aber n und r gleich einer und derselben Wurzel ν_1, so nehmen wir zunächst noch r als ein wenig verschieden von ν_1 an, indem wir etwa $r = \nu_1 + \delta n$ setzen. Läßt man dann δn zur Grenze Null gehen, so entsteht als Gegenstück zu Gl. (7.5a) die Formel:

$$\int_{\cos\alpha}^{1} [\mathrm{P}_{\nu_1}(x)]^2 \cdot dx = \sin\alpha \cdot \frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2\nu_1+1} \times \mathrm{P}_{\nu_1}(\cos\alpha) \cdot \left(\frac{\partial\, \mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)}{\partial n}\right)_{n=\nu_1} . \tag{7.5b}$$

Für die Reihenkoeffizienten v_ν der Gl. (7.1) ergibt sich damit allgemein das Bildungsgesetz (7.6a), das für den ersten Reihenkoeffizienten $\nu = 0$ in die einfachere Gl. (7.6b) entartet. Wir können darnach für eine gegebene Ge-

$$v_\nu = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu\cdot(\nu+1)} \cdot \{\mathrm{P}_\nu(\cos\alpha) \times (\partial \mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu}\}^{-1} \times \int_0^{\alpha} V_n(\vartheta')\, \mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta') \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' , \tag{7.6a}$$

$$v_0 = \left(1/2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \int_0^{\alpha} V_n(\vartheta') \cdot \sin\vartheta' \cdot d\vartheta' \tag{7.6b}$$

schwindigkeitsverteilung $V_n(\vartheta')$ die Koeffizienten v_ν in der Entwicklung (7.1) als gegeben ansehen.

Das Druckfeld, das zu der mit der Geschwindigkeitsverteilung $V_n(\vartheta')$ von (7.1) vibrierenden Kugelkappe gehört, folgt nun sofort aus Gl. (4.2), wenn wir darin V_n durch den Ausdruck (7.1) ersetzen und in dem Bereich $0 \cdots \alpha$ über ϑ' integrieren. Die nochmalige Berücksichtigung der Gl. (7.5) liefert dann für das Druckfeld der nach dem Gesetz $V_n(\vartheta')$ axial symmetrisch schwingenden Kugelkappe die folgende Beziehung:

$$p(r,\vartheta) = c\varrho_0 \cdot \sum_{\nu=n_{q,-1}}^{q=0,\infty} v_\nu \cdot z_\nu(a k) \times \frac{\zeta_\nu^{(1)}(r k)}{\zeta_\nu^{(1)}(a k)} \cdot \mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta) \qquad (n_{0,-1} = 0) . \tag{7.7}$$

Das ist die übersichtlichste Form, in der sich die Lösung der allgemeinen Aufgabe angeben läßt. Da v_ν selbst die Dimension einer Geschwindigkeit hat, so bedeutet in (7.7) $c\varrho_0 \cdot v_\nu \cdot z_\nu(a k)$ mit $\nu = n_{p,-1}$ den Druckanteil der p-ten Oberwelle an der Oberfläche der Kappe. Der Öffnungswinkel α des Kegels, zwischen dessen Mantelflächen die an der Kegelspitze angeordnete Kugelkappe schwingt, kann in der Gl. (7.7) jeder beliebige Winkel zwischen 0^0 und 180^0 sein. Es versteht sich von selbst, daß in der jetzigen Lösung die Lösungen der beiden in den Abschnitten 5 und 6 behandelten Aufgaben enthalten sein müssen. Davon kann man sich an Hand der Gl. (7.6a,b) sofort überzeugen, denn es ist zu diesem Zweck nur erforderlich, darin $V_n(\vartheta')$ entweder durch v_ν oder durch $v_z \cdot \cos\vartheta'$ zu ersetzen. Die Gl. (5.1,2) und (6.1,2) führen dann in der Tat zu den beiden Lösungen (5.3) und (6.3) zurück. Für $\alpha = 180^0$ durchläuft der Zeiger ν alle positiven ganzen Zahlen mit Einschluß der Null. Es handelt sich dann um die Ausbreitung des Schalles von einer zwar axialsymmetrisch, aber sonst beliebig schwingenden Kugel in den freien Raum. Die allgemeine Lösung ist hierfür seit langem bekannt [3]. Sie wird jedoch zumeist in anderer Form angegeben, als es hier geschehen ist. Zu dieser älteren Schreibweise gelangt man mittels der beiden Definitionsgleichungen (7.7a) und (7.7b), die jedoch bei der üblichen Erklärung der Polynome f_n und F_n

$$e^{\pi i(n+1)/2} \cdot \zeta_n^{(1)}(z) = e^{iz}/z \cdot f_n(-iz) \tag{7.7a}$$

$$e^{\pi i(n+1)/2} \cdot \zeta_n^{(1)\prime}(z) = -e^{iz}/z^2 \cdot F_n(-iz) \tag{7.7b}$$

nur für ganzzahlige n gelten. In der Gl. (7.7) wird damit für $\nu \to n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$z_n(a k) \cdot \frac{\zeta_n^{(1)}(r k)}{\zeta_n^{(1)}(a k)} = -i \cdot \frac{a k^2}{r k} \times e^{ik(r-a)} \cdot f_n(-i r k)/F_n(-i a k) \tag{7.7c}$$

während die Definitionsgl. (7.6) für v_ν in Rücksicht auf (7.5b) übergehen in die einfachere Formel:

$$v_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} V_n(\arccos x) \cdot \mathrm{P}_n(x) \cdot dx \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots) . \tag{7.7d}$$

Für den allgemeineren Fall einer Kugelkappe, die innerhalb eines Kegels von beliebigem Öffnungswinkel schwingt, scheint die Lösung (7.7) neu zu sein.

Nach den Gl. (7.6a) und (7.5a,b) kommt im Kegel das Druckfeld einer der unzählig vielen Oberwellen allein zustande, wenn sich dabei die sehr kleinen Deformationen der Kugelkappe

normal zu ihrer Fläche nach dem Gesetz $P_\nu(\cos\vartheta')$ verteilen. Um einen Begriff davon zu geben, wie diese Deformationen aussehen müßten, wurde in die Abb. 10 in stark vergrößertem Maßstabe sowohl die Kontur der ruhenden wie der ausgelenkten Kugelkappe eingezeichnet. Vollziehen sich die konphasen

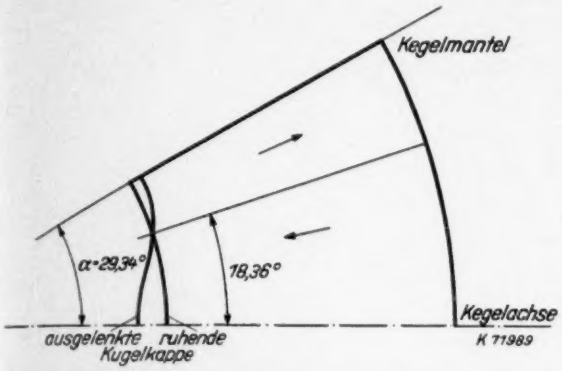


Abb. 10. In dieser Form müßte eine Kugelkappe in einem Kegelhorn schwingen, wenn nur die erste Oberwelle des Schalldrucks zustande kommen soll

Schwingungen der Kugelkappe der Amplitude wie der Verteilung nach tatsächlich in der dargestellten Weise, so entsteht dabei im Raum des Kegels allein die erste Oberwelle des Druckes. Der Öffnungswinkel α des Kegels beträgt in Abb. 10 29,34°. Hingegen erscheint von der Kugelspitze aus gesehen der stets in Ruhe befindliche einzige Knotenkreis der Kugelkappe in diesem Beispiel unter einem Winkel von 18,36°. Auf der Kegelfläche mit diesem Öffnungswinkel haben im Raum des Kegels selbst alle Masseteilchen eine verschwindende Schnellenkomponente v_r. Bei der p-ten Oberwelle sind auf der Kugelkappe im ganzen p Knotenkreise vorhanden.

7.1. Der Sonderfall des einseitig abgeschlossenen Zylinders

Es ist sehr lehrreich, zu untersuchen, welche Umwandlung die Gl. (7.7) erfährt, wenn gemäß Abb. 11 die Spitze des Kegels immer weiter nach links rückt, dabei jedoch die Kreislinie $A\,A'$ der Mantelfläche des Kegels festgehalten wird. Der Kegel geht dabei schließlich in einen Zylinder über, dessen Radius gleich dem Radius b des Kreises $A\,A'$ wird. Die früheren Kugelradien a und r werden bei diesem Grenzübergang in der Weise unendlich groß, daß ihr Produkt mit den gegen Null strebenden Winkeln α und ϑ die Gl. (7.8a,b) erfüllt. Nach Abb. 3 gehen andererseits für $\alpha \to 0$ die

$$(7.8a)\quad a\cdot\alpha \to b \qquad (7.8b)\quad r\cdot\vartheta \to \varrho$$

Wurzeln ν der Gleichung $P_\nu^{-1}(\cos\alpha) = 0$ gegen unendlich. Dies geschieht, wie auch die Gl. (6.11) erkennen läßt, in der Weise, daß dabei das Produkt $\alpha\cdot\nu$ nach Gl. (7.9) in eine der unendlich vielen Wurzeln $j_{1,p}$ der Gleichung $J_1(x) = 0$

$$(7.9)\qquad \alpha\cdot\nu \to j_{1,p} \qquad (p=1,2,3\ldots)$$

übergeht. Der Abb. 12 selbst läßt sich entnehmen, daß für die endlich bleibende Differenz $r - a$ die Gl. (7.8) gilt. Ferner ist nach einer

$$(7.8)\qquad r\cdot\cos\vartheta - a\cdot\cos\alpha \to z$$

von MACDONALD [8] angegebenen Formel für sehr kleine Winkel α in erster Näherung:

$$(7.10)\qquad P_n^{-m}(\cos\alpha)\cdot\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\right\}^m \approx J_m\left((2n+1)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Daraus folgen sofort für unseren Fall die nachstehenden drei Beziehungen:

$$(7.11a)\qquad P_\nu(\cos\alpha) \to J_0(j_{1,p}),$$

$$(7.11b)\qquad P_\nu(\cos\vartheta) \to J_0(j_{1,p}\cdot\varrho/b),$$

$$(7.11c)\qquad (\partial P_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n-\nu} \to \alpha/\nu\cdot J_0(j_{1,p}).$$

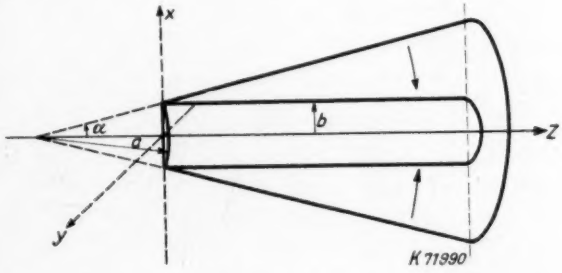


Abb. 11. Der durch eine Kugelkappe begrenzte Kegel und seine Entartungsform als Zylinder mit kreisförmiger Grundplatte

Schließlich läßt sich für große Werte von $r\,k$ und einen Wert von ν, für den etwa $\nu < r\,k$, die HANKELsche Funktion $H^{(1)}_{\nu+1/2}(r\,k)$ durch die Gl. (7.12) annähern. Da demzufolge bei dem Grenzübergang $\alpha \to 0$ der Hilfswinkel ε

endlich bleibt, so wird das Argument der Funktion $H^{(1)}_{1/3}$ selbst unendlich groß, so daß

$$\zeta^{(1)}_\nu(\nu k) \approx (\pi/2\nu k)^{1/2} \cdot \operatorname{tg}\varepsilon / \sqrt{3}$$

$$(7.12)\quad \times e^{\pi i/6 - \nu \cdot i \cdot \left[\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon + \frac{1}{3}\cdot \operatorname{tg}^3\varepsilon\right]} \cdot H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\cdot \operatorname{tg}^3\varepsilon\right)$$

$$\text{mit } \cos\varepsilon = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)/\nu k$$

$$\approx \nu/\nu k = j_{1,p}/b k \cdot a/\nu \to j_{1,p}/b k$$

sich diese Funktion selbst wieder durch ihre gewöhnliche asymptotische Näherung (7.12a)

$$(7.12a)\quad \zeta^{(1)}_\nu(\nu k) \sim 1/\nu k \times (\sin\varepsilon)^{-1/2} \cdot e^{-\pi i/4 + \nu \cdot i(\operatorname{tg}\varepsilon - \varepsilon)}$$

ersetzen läßt. Nach rein elementaren Rechnungen ergeben sich daraus die beiden Grenzgleichungen:

$$(7.13)\quad \zeta^{(1)}_\nu(\nu k)/\zeta^{(1)}_\nu(a k) \to e^{i\cdot z k \cdot \sqrt{1-(j_{1,p}/b k)^2}},$$

$$(7.14)\quad z_\nu(a k) \to 1/\{1-(j_{1,p}/b k)^2\}^{1/2}.$$

Ist hierin $j_{1,p} > b k$, so hat man für die beiden Wurzeln in (7.13) und (7.14) zu schreiben: $i \cdot ((j_{1,p}/b k)^2 - 1)^{1/2}$. Für die Schallwellen in einem kreiszylindrischen Rohr ist also stets der Schallwellenwiderstand entweder eine reelle oder eine rein imaginäre Größe. Ein komplexes Übergangsgebiet existiert in diesem Falle nicht.

Wir haben damit alle Beziehungen für den Übergang zu einem zylindrischen Rohr beisammen, und wir gelangen mit ihrer Hilfe, nachdem sie in die Gl. (7.6) und (7.7) eingesetzt worden sind, zu dem folgenden Ergebnis:

Führt in einem einseitig abgeschlossenen, aber sonst unendlich langen kreiszylindrischen Rohr die im Querschnitt $z = 0$ angeordnete, den Abschluß bildende Grundplatte axialsymmetrische Schwingungen aus, deren zur Zylinderachse parallele Geschwindigkeitsamplituden das Verteilungsgesetz $V_z(\varrho)$ befolgen, so wird in diesem Rohr eine Schallwelle erzeugt, deren Druckfeld die Gl. (7.15) beschreibt. In dieser

$$(7.15)\quad \not p(\varrho, z) = c \cdot \varrho_0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} v_p \cdot \frac{J_0(j_{1,p}\cdot \varrho/b)}{\sqrt{1-(j_{1,p}/b k)^2}} \cdot e^{i\cdot z k \cdot \sqrt{1-(j_{1,p}/b k)^2}} \quad (j_{1,0} = 0)$$

Gleichung stellen die Faktoren $j_{1,p}$ mit $p = 1, 2, 3 \ldots$ die unendlich vielen Wurzeln der Gleichung $J_1(x) = 0$ dar, während sich die Koeffizienten v_p mit der Dimension der Geschwindigkeit aus der gegebenen Verteilungsfunktion $V_z(\varrho)$ mit Hilfe der Gl. (7.15a, b)

$$(7.15a)\quad v_p = 2/(b^2 \cdot J_0^2(j_{1,p})) \cdot \int_0^b V_z(\varrho) \cdot J_0(j_{1,p}\cdot \varrho/b) \cdot \varrho \cdot d\varrho$$

$$(7.15b)\quad v_0 = 2/b^2 \cdot \int_0^b V_z(\varrho) \cdot \varrho \cdot d\varrho$$

berechnen.

Schwingt die ebene Grundplatte als Ganzes in durchweg axialer Richtung, so ist $V_z(\varrho)$ von ϱ unabhängig und von den v_p ist allein v_0 von Null verschieden. Im Zylinder breitet sich in diesem Falle, wie man es auch erwartet, nur eine einzige, und zwar ebene Welle aus. Schwingt hingegen die Grundplatte mit einem Knotenkreis, dessen Radius $\varrho_1 < b$ die Gleichung $J_0(\varrho_1 \cdot j_{1,1}/b) = 0$ erfüllt, so tritt allein die erste Oberwelle auf. Zu einer wirklich fortschreitenden Welle kommt es in diesem Falle jedoch nur dann, wenn $b k > j_{1,1}$ oder $\lambda < 2\pi b/j_{1,1}$ ist. Wir gehen im übrigen auf diese Verhältnisse hier nicht näher ein, da sie im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur Folgerungen aus zweiter Hand darstellen.

7.2. Das Kegelhorn im Anschluß an das zylindrische Rohr

Die in diesem Abschnitt entwickelten Formeln weisen auch den Weg, der zu beschreiten ist, um etwa den Übergang einer in einem zylindrischen Rohr fortschreitenden ebenen Welle in ein Kegelhorn auf der Basis der linearisierten Bewegungsgesetze des Schalles in aller Strenge zu behandeln. Wir haben nicht die Absicht, diese Aufgabe hier wirklich durchzuführen. Wegen der physikalischen Folgerungen, zu denen sie führt, dürfte es jedoch nicht ohne Interesse sein, den Lösungsweg der Aufgabe wenigstens kurz zu beschreiben.

Die in den Kegelraum einfallende Welle befolgt das Gesetz $\exp(i k z - i \omega t)$. Ihr Vorhandensein äußert sich demnach eben darin, daß in den einzelnen Flächenelementen des Übergangsquerschnitts $A M B$ von Abb. 12 eine nahezu konphase axiale Schwingungsbewegung vor sich geht. Wir hätten also mit der Gl. (6.3) nach einer leicht anzubringenden Ab-

änderung bereits die vollständige Lösung der Aufgabe in Händen, wenn nicht mit einer in das zylindrische Rohr zurücklaufenden Welle gerechnet werden müßte. Schon allein hieraus ergibt sich, daß bei dem Übertritt der ebenen Welle in den konischen Teil nicht bloß, wie die elementare Theorie annimmt, eine reine Kugelwelle zustande kommt — das ist die

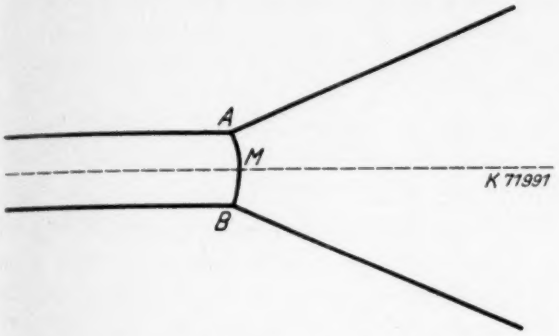


Abb. 12. Das Kegelhorn im Anschluß an ein zylindrisches Rohr

Grundwelle der Gl. (6.3) —, sondern daß außerdem noch Druckwellen höherer Ordnung entstehen, über deren Gesetzmäßigkeit die Glieder der unendlichen Reihe (6.3) Auskunft geben.

Dieses auf der Seite des Kegels verschärfte Bild von den Vorgängen an der Übergangsstelle bedarf einer weiteren Ergänzung im Hinblick auf das Wellenspiel im Zylinder. Da es nämlich nicht einmal möglich ist, die Grenzbedingungen über den stetigen Durchgang von Druck und Normalgeschwindigkeit selbst unter Berücksichtigung einer reflektierten, aber immer noch ebenen Welle zu erfüllen, so bleibt nur noch die Annahme übrig, daß auch innerhalb des Zylinders unter den reflektierten Wellen solche eines verwickelteren Typus als die ebene Welle auftreten. Diese höheren Wellenformen bilden die Hohlleiterwellen, die in der Gl. (7.15) durch die Summenglieder beschrieben werden. Daß unter Umständen bei nicht genügend hoher Frequenz keine dieser Wellen als fortschreitende Welle bestehen kann, ist zwar physikalisch von Belang, es ändert aber nichts an der Notwendigkeit, sie bei der Anpassung der Wellenvorgänge mit zu berücksichtigen.

Mit einem rechnerischen Ansatz, der in diesem Sinne sowohl der Modifikation des durchgehenden wie des reflektierten Wellenzuges Rechnung trägt, ist es dann in der Tat möglich, die oben angegebenen Grenzbedingungen streng zu befriedigen. Die Durchführung dieser Rechnungen bis in die numerische Auswertung hinein wäre allerdings sehr mühsam, da sie auf die Auflösung unendlich vieler Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten hinausläuft und also eine Aufgabe darstellt, die auch bei Zurückführung auf eine Integralgleichung nur durch schrittweise Näherungen gelöst werden kann. Wir lassen es daher mit diesem Hinweis genug sein.

8. Der endliche, durch eine Kugelkappe abgeschlossene Kegel und seine Eigenschwingungen

Zum Unterschied gegen die bisherige Annahme denken wir von nun an gemäß Abb. 13 den Kegel durch eine Kugelkappe vom Radius b cm nach außen abgeschlossen. Als Schallquelle diene zunächst wiederum der vibrierende Ring von Abschnitt 3.1 auf der Kugelfläche $r' < b$ mit dem Öffnungswinkel ϑ'. Im vorliegenden Fall ist dann die Gl. (3.7), von der die Rechnungen ihren Ausgang zu nehmen

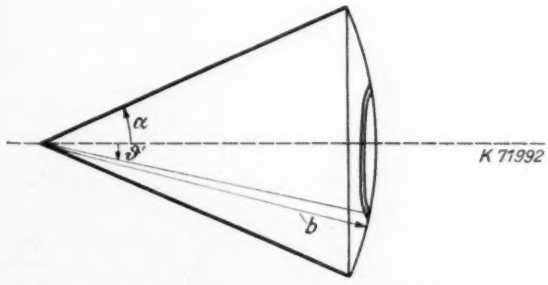


Abb. 13. Der durch eine Kugelkappe mit dem Radius b abgeschlossene Kegel mit Spitze mit einem vibrierenden Ring in der Kappe als Schallquelle

haben, so auszugestalten, daß sie außer der Forderung $\mathfrak{v}_\vartheta = 0$ für $\vartheta = \alpha$ auch der Randbedingung $\mathfrak{v}_r = 0$ für $r = b$ genügt. Der Einbau der Kugelfläche hat zur Folge, daß sich in dem Kegelstumpf eine stehende Welle ausbildet. Die zu Gl. (3.7) hinzutretende Lösung

muß also im ganzen Raum $r < b$

an Stelle von $\zeta_\nu^{(1)}(k\,r)\,\psi_\nu(k\,r')$

die Faktoren $\psi_\nu(k\,r)\cdot\psi_\nu(k\,r')\cdot A(\nu)$

enthalten, wobei wohl zu beachten ist, daß nach den Gültigkeitsbedingungen der Gl. (3.7) das zuerst genannte Produkt nur im Raum $r > r'$ auftritt. Wegen der eben erwähnten Grenzbedingung muß dann der unbekannte Faktor $A(\nu)$ die Gl. (8.1) befriedigen. Setzt man mit diesem Ausdruck für $A(\nu)$ die gesamte Gleichung für den Druck p im Raumteil

$$A(\nu) = -\zeta_\nu^{(1)\prime}(k\,b)/\psi_\nu(k\,b) \tag{8.1}$$

$r < r'$ zusammen, so hat die Lösung die Gestalt der Gl. (3.7) mit dem einzigen Unterschied, daß in ihr das Produkt $\zeta_\nu^{(1)}(k\,r')\cdot\psi_\nu(k\,r)$ zu ersetzen ist durch das Glied:

$$\psi_\nu(k\,r)/\psi_\nu'(k\,b)\cdot\{\psi_\nu'(k\,b)\,\zeta_\nu^{(1)}(k\,r') - \psi_\nu(k\,r')\,\zeta_\nu^{(1)\prime}(k\,b)\}\,.$$

An der so modifizierten Form der Gl. (3.7) vollziehen wir den Grenzübergang $r' \to b$. Für alle Frequenzen $\omega = k\,c$, die nicht gerade der Gl. (8.2) genügen, ergibt sich dann für das

$$\psi_\nu'(k\,b) = (\pi/2)^{1/2} \times\left\{\frac{d}{d\,x}\left(x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{J}_{\nu+\frac{1}{2}}(x)\right)\right\}_{x=k\,b} = 0 \tag{8.2}$$

$$(\nu = 0,\ n_{p,-1})$$

Druckfeld in einem abgeschlossenen Kegel, das nach Abb. 13 durch einen in der begrenzenden Kugelkappe gelegenen vibrierenden Ring mit dem Öffnungswinkel ϑ' erzeugt wird, die nachstehende Beziehung:

$$p(r,\vartheta) = \mathrm{i}\,\varrho_0\,c/\sin\alpha\cdot V_n(\vartheta')\cdot\sin\vartheta'\cdot d\,\vartheta' \times\left\{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{b}{r}\cdot\frac{\sin k\,r}{\cos k\,b - \sin k\,b/k\,b}\right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=n_{p,-1}}^{p=1,\infty}{}' \frac{2\,\nu+1}{\nu\cdot(\nu+1)}\cdot\frac{\psi_\nu(k\,r)}{\psi_\nu'(k\,b)} \times\frac{\mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta)\cdot\mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta')}{\mathrm{P}_\nu(\cos\alpha)\cdot(\partial\,\mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)/(\partial\,n)_{n=\nu}}\right\}. \tag{8.3}$$

Da alle in der geschweiften Klammer von (8.3) stehenden Glieder für reelles k selbst reell sind, so schwingt der im Kegelstumpf vorhandene Druck wegen $V_n = -\mathrm{i}\,\omega\,\xi$ entweder in Phase oder in Gegenphase zur anregenden Schwingung des Ringes.

Für diejenigen Frequenzen, die die Gl. (8.2) erfüllen, werden die Amplituden des Drucks unendlich groß. Das Spektrum der Eigentöne wird darnach von allen denjenigen Frequenzen gebildet, für die das Argument $k\,b$ eine Wurzel der Gl. (8.2) ist. Für die Grundwelle, bei der die Druckverteilung nur von r abhängt, ist in (8.2) $\nu = 0$ zu setzen. Die vom Öffnungswinkel α des Kegels unabhängige Resonanzbedingung hat demnach im besonderen die

$$\operatorname{tg} k\,b = k\,b \tag{8.4a}$$

einfache Form der Gl. (8.4a). Führen jedoch bei den Schwingungen im Kegelstumpf die Mediumteilchen auch eine andere als bloß radiale Bewegung aus, so wird begreiflicherweise die Resonanzbedingung auch vom Öffnungswinkel α des Kegels abhängig. Sie hat in ausgeschriebener Form die Gestalt von Gl. (8.4b). Die Abhängigkeit dieser Resonanzbedingung von α steckt also ausschließlich in

$$\mathrm{J}'_{\nu+\frac{1}{2}}(k\,b) = \mathrm{J}_{\nu+\frac{1}{2}}(k\,b)/2\,k\,b \quad\text{oder}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-\frac{1}{2}}(k\,b) = (\nu+1)/k\,b\cdot\mathrm{J}_{\nu+\frac{1}{2}}(k\,b) \tag{8.4b}$$

dem Zeigerwert ν.

Für die Grundwelle und die erste räumliche Oberwelle wurde der Verlauf von $k\,b$ mit dem Öffnungswinkel α des Kegels in Abb. 14 graphisch dargestellt. Als Ordinate dient das Verhältnis $\lambda/b = 2\,\pi/k\,b$. Ist ν zufällig ganzzahlig, so sind die aus (8.4b) zu berechnenden Eigenschwingungszahlen identisch mit denen, die für die höheren Schwingungsformen einer in einer Hohlkugel eingeschlossenen Gasmasse gelten und die von Rayleigh [3] angegeben worden sind. Diese Übereinstimmung braucht nicht zu überraschen, denn alle diese Schwingungstypen sind so beschaffen, daß innerhalb der Kugel, in der sie stattfinden, um die Polarachse herum dünnwandige Kegelflächen eingesetzt werden könnten, ohne die Bewegung zu beeinflussen, und diese Kegel sind es, die im vorliegenden Falle am Ausgangspunkt der Betrachtungen stehen.

Die Gl. (8.3) läßt sich auf den Fall anwenden, daß die Erregung des Schallfeldes im Innern des Kegelstumpfes von einem kleinen kreis-

förmigen Kolben mit dem Radius d ausgeht, dessen Mittelachse mit der Kegelachse zusammenfällt und der in einer zu seiner Größe passenden kreisförmigen Bohrung der Kappe hin- und herschwingt. Fällt auf diese Öffnung von außen eine ebene Schallwelle, so spielt der eindringende Luftpfropfen selbst die Rolle

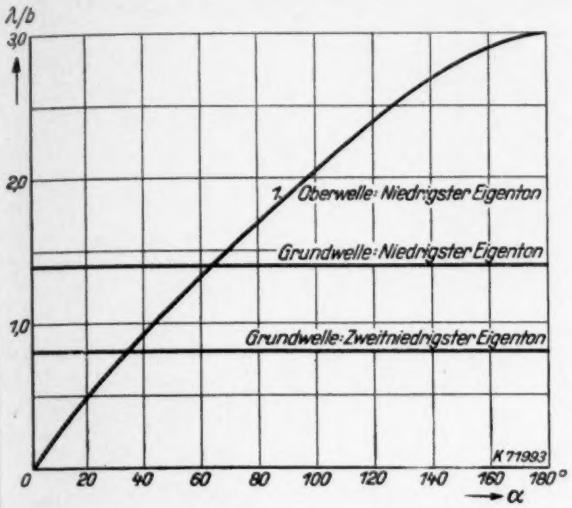


Abb. 14. Die Eigenwellenlängen eines durch eine Kugelkappe abgeschlossenen Kegels für die beiden niedrigsten Eigentöne der Grundwelle und den niedrigsten Eigenton der 1. räumlichen Oberwelle in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α des Kegels

des Kolbens. Wegen der Kleinheit der Kolbenfläche darf seine Bewegung, obwohl sie in Wirklichkeit in axialer Richtung erfolgt, auch als eine radiale betrachtet werden. Die Druckverteilung im Kegelstumpf ist dann bei dieser Art der Anregung in Rücksicht auf die Gl. (5.1) und (5.2) mit $\operatorname{tg}\gamma = d/b$ durch die Beziehung gegeben:

$$p(r,\vartheta) = \mathrm{i}\,\varrho_0 c \cdot V_r \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{b}{r}$$

$$\times \frac{\sin k r}{\cos k b - \sin k b/k b} + \sum_{\nu=n_{p,-1}}^{\nu=1,\infty} \frac{2\nu+1}{\nu\cdot(\nu+1)} \times \frac{\psi_\nu(k r)}{\psi'_\nu(k b)} \cdot \frac{\mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta)\cdot \mathrm{P}_\nu^{-1}(\cos\gamma)}{\mathrm{P}_\nu(\cos\alpha)\cdot(\partial\,\mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu}} \Bigg| . \tag{8.5}$$

Diese Gleichung wollen wir noch etwas anders schreiben, indem wir an Stelle von V_r die Volumenänderung des Kegelstumpfes infolge der Bewegung des Kolbens einführen. Nach einer bekannten Formel ist das Volumen A des Kegelstumpfes gleich $4\pi b^3/3 \cdot \sin^2(\alpha/2)$ und die Oberfläche des schwingenden Kolbens gleich $4\pi b^2 \cdot \sin^2(\gamma/2)$. Da nun bei dem Zeitgesetz $\exp(-\mathrm{i}\,\omega t)$ V_r mit der Verschiebung des Kolbens über die Beziehung $V_r = -\mathrm{i}\,\omega \cdot \xi$ verknüpft ist, so gilt wegen der Gleichheit der Volumenänderung δA mit dem Produkt $\xi \cdot 4\pi b^2 \cdot \sin^2(\gamma/2)$ der Zusammenhang:

$$V_r = -\mathrm{i}\,c/3 \cdot b\,k \cdot \delta A/A \times \sin^2(\alpha/2)/\sin^2(\gamma/2)\,, \tag{8.6}$$

Nach Herausnahme des Faktors $\operatorname{tg}(\gamma/2)/\operatorname{tg}(\alpha/2)$ kann daher statt der Gl. (8.5) auch geschrieben werden:

$$p(r,\vartheta) = -\varrho_0 c^2 \cdot k\,b/3 \cdot \delta A/A \times \left\{ \frac{b}{r} \cdot \frac{\sin k r}{\sin k b/k b - \cos k b} - \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) \sum_{\nu=n_{p,-1}}^{\nu=1,\infty} \frac{2\nu+1}{\nu\cdot(\nu+1)} \cdot \frac{\psi_\nu(k r)}{\psi'_\nu(k b)} \times \frac{\mathrm{P}_\nu(\cos\vartheta)\cdot \mathrm{P}_\nu^{-1}(\cos\gamma)}{\mathrm{P}_\nu(\cos\alpha)\cdot(\partial\,\mathrm{P}_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu}} \right\} . \tag{8.5a}$$

Diese Gleichung gilt für alle k und alle Öffnungswinkel des Kegels zwischen 0 und 180°. Geht in (8.5a) $k \to 0$, so wird das erste Glied in der Klammer gleich $3/k\,b$, während die unendliche Summe verschwindet, weil jedes der Glieder den Faktor $k\,b$ bekommt. Bei sehr großer Wellenlänge der einfallenden Schallwelle ist daher die Druckänderung $p = -\varrho_0 \cdot c^2 \cdot \delta A/A$. Das ist der gleiche Ausdruck, der in der Theorie der Helmholtzschen Resonatoren angegeben und dort unmittelbar aus der Gasgleichung hergeleitet wird. Die vorliegende Rechnung bestätigt damit auch von dieser Seite her die Tatsache, daß die Eigenschwingung eines Gasvolumens im Sinne der Theorie von Helmholtz eine Schwingungsform darstellt, bei der der Grad der Verdichtung oder Verdünnung für das ganze Gasvolumen merklich derselbe ist und keine örtlichen Verschiedenheiten aufweist. Es muß also für die Gültigkeit dieser Theorie die Wellenlänge groß sein auch gegenüber der größten Dimension des Resonators.

Durch ein Zahlenbeispiel wollen wir uns noch an Hand der Gl. (8.5) davon überzeugen,

daß die Art der Schwingungsanregung, die ihr zugrunde liegt, im vorliegenden Fall trotz der als radial aufgefaßten Bewegung des Kolbens nicht bloß die Grundwelle, sondern in noch stärkerem Maße auch die erste räumliche Oberwelle anfacht. Wie in dem Beispiel von Abschnitt 6 sei $\alpha = 16{,}274^0$ und $\gamma = 2^0$. Dann ist $\nu_1 = 13$ und außerdem

$$\operatorname{tg}(\gamma/2) = 0{,}0175$$
$$P_{\nu_1}^{-1}(\cos\gamma) = 0{,}0246$$
$$P_{\nu_1}(\cos\alpha) = -0{,}4055$$
$$(\partial P_n^{-1}(\cos\alpha)/\partial n)_{n=\nu_1} = -0{,}00854.$$

Liegt der Aufpunkt in der Kegelachse, so errechnet sich demzufolge in der geschweiften Klammer von (8.5)

für das erste Glied $0{,}1221 \cdot \psi_0(k\,r)/\psi_0(k\,b)$
und
für das zweite Glied $1{,}0521 \cdot \psi_{13}(k\,r)/\psi'_{13}(k\,b)$.

In der Nähe der Resonanzstellen können sich natürlich diese Größenverhältnisse nach der einen oder anderen Seite verschieben. Das im vorliegenden Falle starke Hervortreten der ersten Oberwelle hängt aufs engste mit der Druckverteilung im Innern des Kegels zusammen. Im Resonanzzustande liegen nämlich bei der ersten Oberwelle die Extremwerte des Druckes einmal in der Kreislinie, die Kegel und Kugel gemeinsam haben, und zum anderen unmittelbar vor der Öffnung in der Kugelkappe. Im übrigen gleicht sie dem in Abb. 5 dargestellten Drucklinienverlauf. Bei einem $b = 20$ cm beträgt die Höhe der Resonanzfrequenz für die Grundwelle rund 1230 Hz und für die erste Oberwelle 4300 Hz. Bei einer Schwingung des Gasvolumens als Ganzes ergibt sich nach der Formel von HELMHOLTZ eine Schwingungszahl von 2,5 Hz. Die hierzu gehörige Wellenlänge beträgt 138 m.

8. 1. Die Eigenschwingungen eines offenen Kegels bei verschwindendem äußeren Schalldruck

Mündet ein flacher, langgestreckter Kegel in den freien Luftraum und ist seine Öffnungsweite klein gegenüber der Wellenlänge des Schalles, so wird in der Akustik in der Regel angenommen, daß der Schalldruck auf der als äußere Begrenzung gedachten Kugelkappe verschwindet. Der Vollständigkeit halber wollen wir hier auch für diesen Fall, ohne sonst näher auf ihn einzugehen, die Resonanzbedingungen für die Eigenschwingungen angeben. Wegen der weiteren Folgerungen kann auf die Arbeit von HOERSCH [10] verwiesen werden.

Aus dem Gang der Rechnungen im Abschnitt 8 ist ohne weiteres zu ersehen, daß infolge der Bedingung $p = 0$ für $r = b$ sich im gegenwärtigen Fall die Resonanzfrequenzen aus den unendlich vielen Wurzeln der Gl. (8.7)

$$\psi_\nu(k\,b) = 0 \tag{8.7}$$

bestimmen. Im besonderen muß also für die Grundwelle die Gl. (8.7a) erfüllt sein. Auch in diesem Falle ist also für diese Welle die Höhe der Eigenfrequenzen unabhängig vom

$$\sin k\,b/k\,b = 0 \tag{8.7a}$$

Öffnungswinkel. Den Gang des tiefsten Eigentons der ersten Oberwelle mit dem Öffnungswinkel α stellt die Abb. 15 dar. Die Art der Darstellung entspricht der früheren Abb. 14

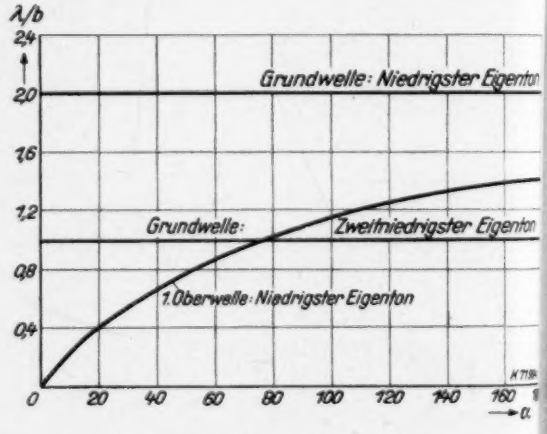


Abb. 15. Die Eigenwellenlängen eines offenen Kegels für die beiden niedrigsten Eigentöne der Grundwelle und den niedrigsten Eigenton der 1. räumlichen Oberwelle in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α des Kegels

Sehr bemerkenswert ist auch hier wieder, daß für gewisse Öffnungswinkel des Kegels die Eigentöne der Grundwelle mit denen der höheren Oberwellen zusammenfallen. Nach Abb. 15 tritt dies z. B. ein bei dem zweiten

Eigenton der Grundwelle und dem niedrigsten Eigenton der ersten Oberwelle, wenn der Öffnungswinkel $\alpha = 77^0$ ist.

Literatur-Zusammenstellung

1. A. G. Webster, Acoustical Impedance and Theory of Horns. J. nat. Acad. Sci. 5 (1919), S. 275.
2. G. W. Stewart and R. B. Lindsay, Acoustics, New York 1930.
3. Rayleigh, Theory of Sound, London 1929.
4. St. Ballantine, On the Propagation of Sound in the general Bessel Horn of infinite Length. J. Franklin Inst. 203 (1927), S. 85—101.
5. R. Stenzel, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen, Berlin 1939.
6. R. Stenzel, Über die Theorie und Anwendung des Hornlautsprechers. Z. techn. Phys. 1931, S. 621—627.
7. L. Gutin, A la Théorie du Pavillon-Récepteur. Phys. Technics USSR 3 (1936), S. 81—98.
8. H. M. Macdonald, Zeroes of the spherical Harmonic $P_n^m(\cos\alpha)$. Proc. London math. Soc. 31 (1899), S. 264—278.
9. H. Buchholz, Die Bewegung elektromagnetischer Wellen durch ein kegelförmiges Horn. Ann. Phys. 37 (1940), S. 173—225.
10. V. A. Hoersch, Non radial harmonic Vibrations in a conical Horn. Phys. Rev. 25 (1925), S. 218—231.

(Eingegangen am 10. Februar 1940.)

Die Messung winkelabhängiger Schallschluckung in einer zweidimensionalen Hallkammer*)

Von Hermann Neubert

Mitteilung aus dem Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Berlin

(Mit 12 Textabbildungen)

I. Ziel der Arbeit; kurzer Abriß der Methode

Die Schallschluckung bei schrägem Einfall und bei tiefen Frequenzen, mit deren Messung sich die vorliegende Arbeit befaßt, ist nicht mit den gebräuchlichen Verfahren zu erfassen.

Unter diesen ist das sog. Nachhallverfahren am verbreitesten und heute technisch am meisten durchgebildet. Man bestimmt hierbei zunächst in einem leeren und möglichst hallenden Raume die Nachhallzeit T_0, bringt dann den Schluckstoff hinein und bestimmt die neue Nachhallzeit T. Der Schluckgrad s ist dann der Differenz der reziproken Nachhallzeiten bzw. der Differenz der Dämpfungskoeffizienten proportional:

$$s = \text{konst.}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) = \text{konst}'.(\delta - \delta_0).$$

Beim Nachhallverfahren verwendet man allgemein möglichst große Räume und große Materialproben. Der Schall trifft dabei den Prüfstoff unter vielen verschiedenen Einfallswinkeln. Man erhält auf diese Weise nur einen Mittelwert des Schluckgrades und keine Aussage über seine Winkelabhängigkeit.

Es wurden daher viele andere Verfahren zur Bestimmung des Schluckgrades bei bestimmten Einfallswinkeln entwickelt. Bei hohen Frequenzen ist das in verschiedener Weise gelungen, da man hier im Freien oder in gedämpften Räumen mit gerichteten Schallstrahlen, die auf die Prüfplatte auftreffen, arbeiten kann. Bei den tiefen Frequenzen scheitert diese Methode an den Abmessungen, die nötig wären, um mit den reflektierenden Flächen groß zur Wellenlänge zu bleiben. Nur der senkrechte Einfall konnte bisher mit der eindimensionalen Anordnung des Kundtschen Rohres gemessen werden, welches an dem einen Ende den Schluckstoff, am anderen die Schallquelle enthält.

*) Von der Technischen Hochschule Berlin zur Erlangung des Grades eines Dr.-Ing. genehmigte Abhandlung (D 83).

Ein von H. und L. CREMER[1]) angegebenes Verfahren beruht auf dem Vergleich der Nachhallzeiten von einzeln angeregten Eigentönen des leeren und des mit Schluckstoff an einer Seitenwand abgeschlossenen rechteckigen Raumes. Hier muß ein kleiner Raum verwendet werden, dessen Abmessungen vergleichbar mit der Wellenlänge sind und der im Gegensatz zum großen Hallraum als Hallkammer bezeichnet werden soll. Das Verfahren stellt also gewissermaßen eine Kombination des Hallraumverfahrens mit dem des KUNDTschen Rohres dar.

Der erste Versuch, die Theorie der Eigentöne solcher Räume theoretisch zu behandeln, geht auf SCHUSTER und WAETZMANN[2]) zurück. Von H. und L. CREMER[1]) wurde die Theorie weiter entwickelt bis zum erstmaligen Vorschlag des oben skizzierten Meßverfahrens. Seit dem Beginn der vorliegenden Arbeit wurde das Verfahren auch von HUNT[3]) und BHATT[4]) benutzt, wobei Einzelheiten der Meßmethode und der Frequenzbereich abweichen.

Für das im Innern eines rechteckigen Raumes (Kanten x, y, z) mit schluckenden Wänden abklingende Wellenfeld eines Eigentones läßt sich das Potential der Schnelle ansetzen:

$$(1) \qquad \varphi = \Sigma\, e^{\pm(ik_1-g_1)x \pm (ik_2-g_2)y \pm (ik_3-g_3)z+(i\omega-\delta)t}.$$

Dieser Ausdruck stellt unter der Voraussetzung, daß $g_n \ll k_n$ ist, also unter Ausschluß des streifenden Einfalls, nahezu ungedämpfte, ebene Wellenzüge dar, deren bestimmte Einfallswinkel annähernd aus dem Eigentonnetz des ungedämpften Raumes (s. unten Abb. 4) entnommen werden können, wenn der Phasensprung an der Schluckstoffoberfläche nicht zu groß ist. Betrachten wir nämlich in der zweidimensionalen, ungedämpften Anordnung einen Wellenzug z. B. der Form

$$\varphi = e^{-ik_1x-ik_2y+i\omega t},$$

so gilt für die Wellenfront als einer Linie konstanter Phase

$$k_1 x + k_2 y = \text{konst.}$$

oder

$$y = \text{konst.} - \frac{k_1}{k_2}\, x$$

also eine Gerade mit der Neigung

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{k_1}{k_2}.$$

Diese Neigung entspricht unter Beachtung der Maschenweiten des Eigentonnetzes der Abb. 4 dem jeweiligen Winkel ϑ im Eigentonnetz.

Zur Ermittlung des Schluckgrades s aus den gemessenen Dämpfungskoeffizienten δ läßt sich, wenn $c\frac{\cos\vartheta}{2\,l_2}$ die Anzahl der Reflexionen an der Schluckfläche in der Zeiteinheit bedeutet, die allgemeine Beziehung anschreiben:

$$e^{-2\delta t} = e^{-2\delta_0 t}\,(1-s)^{c\frac{\cos\vartheta}{2l_2}t}$$
$$= e^{-2\delta_0 t + \ln(1-s)\,c\frac{\cos\vartheta}{2l_2}t}$$

(l_2 = Raumerstreckung in Richtung senkrechten Einfalls, c = Schallgeschwindigkeit), also

$$(2) \qquad \delta = \delta_0 + \frac{s'\cos\vartheta}{4\,l_2},$$

wenn s' den Schluckexponenten

$$s' = -\ln(1-s)$$

bedeutet.

Der Phasensprung γ, der vom Blindanteil des Wandwiderstandes herrührt, läßt sich aus der Beziehung

$$(3) \qquad \frac{\omega^2-\omega_0^2}{c^2} = \frac{n_2\pi\gamma}{l_2^2};\quad n_2 = 1, 2, 3\ldots$$

ermitteln, wobei ω und ω_0 die Eigenfrequenzen der gedämpften und der ungedämpften Kammer bedeuten.

Für den streifenden Einfall wurden von L. CREMER[5]) in einer späteren Arbeit die theoretischen Zusammenhänge geklärt. Danach ist der Dämpfungsfaktor δ_{90} bei streifendem Einfall annähernd

$$(4) \qquad \delta_{90} = \frac{c}{2\,l_2}(A_{90}\cdot Z),$$

wenn A_{90} den Wirkanteil des Wandleitwertes und Z den Wellenwiderstand der Luft bedeuten. Andererseits läßt sich (2) für senk-

[1]) H. u. L. CREMER, Akust. Z. 2 (1937), S. 225 u. 296.

[2]) K. SCHUSTER u. E. WAETZMANN, Ann. Phys., Lpz. V. 1 (1929), S. 671.

[3]) F. V. HUNT, J. Acous. Soc. Am. 10 (1939), S. 216.

[4]) N. B. BHATT, J. Acous. Soc. Am. 11 (1939), S. 67.

[5]) L. CREMER, Akust. Z. 5 (1940), S. 57.

rechten Einfall und kleinen Wandleitwert in die Form [5a])

$$\delta_0 = \frac{c}{l_2}(A_0 \cdot Z) \tag{5}$$

überführen. Der Vergleich zeigt, daß der Dämpfungsfaktor für streifenden Einfall nur halb so groß ist wie der für senkrechten Einfall, wenn $A_0 = A_{90}$ wird. Dies trifft bei den meisten porösen Schluckstoffen im Bereiche tiefer Frequenzen zu. Eine Ausnahme dieser Voraussetzung wird in einem späteren Abschnitt behandelt.

In der vorliegenden Arbeit wurden nur wenige typische Schallschluckstoffe und Stoffanordnungen untersucht. Der Frequenzbereich ist nach unten durch die größten Abmessungen der Hallkammer, nach oben dadurch begrenzt, daß bei der nachfolgend beschriebenen Kammer die dritte Dimension klein zur Wellenlänge bleibt. Er liegt bei 80—220 Hz. Das besondere Kennzeichen des Verfahrens und die Neuheit der Ergebnisse liegen also darin, daß sich winkelabhängige Schallschluckzahlen auch bei sehr tiefen Frequenzen angeben lassen. Bei sehr großen Schluckgraden ist die Anwendbarkeit des Meßverfahrens insofern begrenzt, als die Resonanzkurven der einzelnen Eigentöne sich stark überdecken. Wohl ist noch eine Einstellung des Eigentones auch bei flachem Maximum möglich, doch erzeugen die benachbarten Eigentöne starke Schwebungen und z. T. durchhängende Abklingkurven.

II. Beschreibung des benutzten Meßaufbaues

Den Kern der Meßanordnung stellt die Hallkammer dar. Die in Abb. 1 eingetragenen Abmessungen wurden der Arbeit von H. und L. Cremer [1]) entnommen. Die flächenhafte Hallkammer wurde gewählt, weil die akustischen Verhältnisse hier durchsichtiger sind, nur kleine Mengen des Prüfstoffes benötigt werden und sich ferner bei erträglichen Abmessungen genügend große Frequenzabstände der Eigentöne erreichen lassen. Die Decke des Raumes besteht aus einer Betonplatte, die auf der einen Seite ebenfalls glatt verputzt und gestrichen wurde wie die sämtlichen Innenflächen des Raumes, während die andere Seite eine Vertiefung für den bündigen Einbau der Schallschluckstoffe erhielt. Durch Hochwinden und Umdrehen der Deckplatte läßt sich in kurzer Zeit der ungedämpfte oder der gedämpfte Zustand der Hallkammer verwirklichen. Die Dichtung zwischen Platte und Raumwänden erfolgt durch doppelt verlegten Gummischlauch, wie er für Türdichtungen verwendet wird.

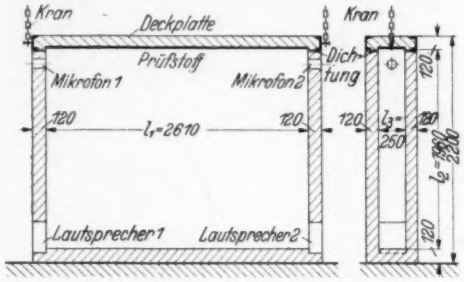


Abb. 1. Abmessungen der Hallkammer

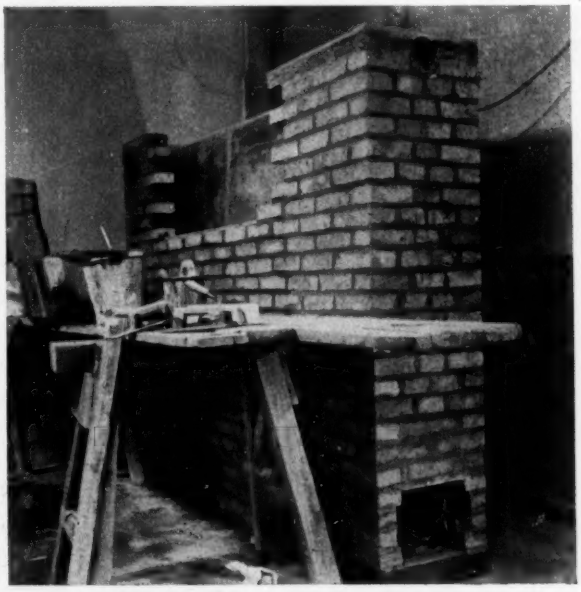


Abb. 2. Hallkammer im Bauzustand. Der Deckel fehlt noch

Die Abb. 2, welche die im Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Berlin

[5a]) δ_0 bedeutet im Gegensatz zu (2) hier den Dämpfungskoeffizienten für senkrechten Einfall ($\vartheta = 0^0$). Die durch das frühere δ_0 gekennzeichnete Dämpfung des leeren Raumes ist hier wie bereits in Gleichung (4) weggelassen.

erstellte Hallkammer[6]) in halbfertigem Zustande zeigt, läßt an der dem Beschauer zugekehrten Schmalseite unten ein rechteckiges Loch für den Einbau eines Lautsprechers und oben ein rundes Loch für das Kondensatormikrophon, das mit dem Vorverstärker in einer Metallröhre vereinigt ist, erkennen. Die unsichtbare zweite Schmalseite hat gleiche Öffnungen, so daß sich durch zwei Lautsprecher und zwei Mikrophone gleich- und gegenphasige Erregung bzw. Aufnahme bewerkstelligen läßt[1]). Lautsprecher und Mikrophone befinden sich also dabei für jede Eigenfrequenz im Druckbauch.

Zur Anregung des Schalles wurden zunächst Blatthaller benutzt, deren Membranen gewissermaßen einen Teil der Schmalwandfläche bilden, deren Schalldurchlässigkeit sich aber als zu groß erwies. Zwei sehr ähnliche dynamische Lautsprecher mit Druckkammern genügten den gestellten Anforderungen am besten. Die Druckkammer war durch ein kurzes Rohrstück mit dem Raume verbunden, so daß eine punktförmige Anregung des Raumes über dies aus Druckkammer und Rohrstück bestehende System erfolgte. Der elektroakustische Frequenzgang des Sendesystems zusammen mit den verwendeten Kondensatormikrophonen, Verstärkern und Anzeigegeräten wurde dadurch ermittelt, daß man Lautsprecher und Mikrophon auf dem Boden eines großen, leidlich gedämpften Raumes in 10 cm Abstand gegenüber aufstellte. Dies Ergebnis ist später in Abb. 5b dargestellt. Danach hat das System keine Resonanzstellen. Bei den tiefen Frequenzen fällt die abgestrahlte Leistung ab. Allerdings ist zur Kleinhaltung der Rückwirkung des Sendesystems auf den Nachhallvorgang ein geringer Wirkungsgrad wünschenswert. Daß die Eigenschaften des Sendesystems auf die Messung keinen Einfluß hatten, wurde außerdem dadurch kontrolliert, daß die Rohrlänge verändert wurde. Es traten keine Änderungen der Nachhallzeiten des leeren Raumes auf.

[6]) Die Hallkammer wurde mit Mitteln der JAGOR-Stiftung hergestellt. Für die Unterstützung möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Auch der im Anfang benutzte normale Tonfrequenz-Schwebungssummer mit gebräuchlichem Kraftverstärker erwies sich für die tiefen Frequenzen als schwer einstellbar und ungenügend konstant. Daher wurde ein von K. O. LEHMANN[7]) angegebener Summer nachgebaut. Er besteht im wesentlichen aus einem von einer Biegefeder getragenen Glasröhrchen, das mit einer veränderlichen Menge Quecksilber angefüllt werden kann. Der Frequenzbereich dieses Summers liegt bei 80—250 Hz. Die Erregung der Biegeschwingung erfolgt über einen besonderen Verstärker. Einer am Glasröhrchen befestigten Tauchspule wird die gut sinusförmige Wechselspannung für den Betrieb der Lautsprecher entnommen.

Abb. 3 zeigt den elektrischen Teil der Meßanordnung. Auf der Mikrophonseite werden

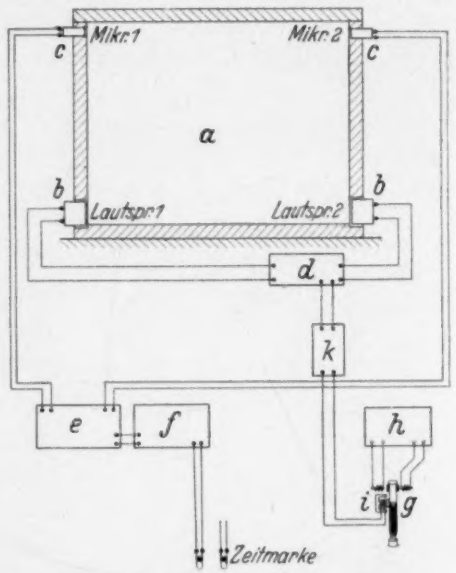


Abb. 3. Elektrischer Teil der Meßanordnung:
a) Hallkammer
b) Lautsprecher 1 und 2
c) Mikrophone 1 und 2 mit Vorverstärkern
d) Amplituden- und Phasenabgleich und Umschalter für die Lautsprecher
e) Amplituden- und Phasenabgleich und Umschalter für die Mikrophone
f) Kraftverstärker für Pegelschreiber bzw. für Oszillograph
g) Quecksilbersummer nach LEHMANN
h) Kraftverstärker zur Erregung des Summers
i) Tauchspule für Lautsprecherstrom
k) Kraftverstärker für den Lautsprecherbetrieb

[7]) K. O. LEHMANN, Z. techn. Phys. 18 (1937) S. 304.

die vorverstärkten Mikrophonspannungen über einen Amplituden- und Phasenregler auf einen Verstärker gegeben, der eine der Oszillographenschleife angemessene Verstärkung besorgt. Auch die Lautsprecher haben eine Vorrichtung, mit der eine Amplituden- und Phasenreglung in gewissen Grenzen möglich ist. Lautsprecher und Mikrophone können für sich jeweils gleich- oder gegenphasig geschaltet werden. Die Wirksamkeit dieser Maßnahme wird später beschrieben.

Als Anzeigegerät diente anfangs ein älterer Schleifenoszillograph hoher Eigenfrequenz, dessen zweite Schleife eine Zeitmarke aufschreibt. Später stellte die HELMHOLTZ-Gesellschaft einen Pegelschreiber nach NEUMANN zur Verfügung, welcher bei technischen Nachhallmessungen heute vorzugsweise verwandt wird[8]).

Sämtliche Verstärker arbeiten ohne Netzanschluß, um bei geringem Aufwand kleinen Störspiegel zu erreichen.

III. Vorversuche, insbesondere in der ungedämpften Hallkammer

In der ungedämpften Hallkammer sind keine Schallschluckstoffe angebracht. Die Dämpfung dieser leeren Kammer ergibt sich also aus der natürlichen Rauhigkeit der Wände, der Mitschwingfähigkeit der Wände, evtl. Undichtigkeiten, der Rückwirkung der Lautsprecher und der Luftdämpfung. Die Dämpfung wurde in bekannter Weise aus der Abklingkurve des Schalles nach Abschaltung der Lautsprecher ermittelt. Ihr Betrag wird von der gemessenen Dämpfung der mit Schluckstoffen ausgestatteten Hallkammer abgezogen, wobei der sicherlich kleine Anteil des nackten Deckels in der Gesamtdämpfung vernachlässigt wird. Die Messungen sind um so genauer, je kleiner die Dämpfung des leeren Raumes ist.

Zur Veranschaulichung der Ergebnisse gehen wir vom räumlichen Eigentonnetz aus, wobei die einzelnen Eigentöne dem Gesetz

$$f = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{l_3}\right)^2} \tag{6}$$

folgen. Für unseren zweidimensionalen Fall wird der dritte Summand unter der Wurzel gleich Null, da sich in der dritten Richtung stehende Wellen für den betrachteten Frequenzbereich nicht ausbilden können, also:

$$f = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2}. \tag{7}$$

Abb. 4 zeigt für unsere in Abb. 1 dargestellte Hallkammer dieses Netz, dessen Maschenweite $c/2\,l_1$ bzw. $c/2\,l_2$ ist. Die tiefste Eigenfrequenz bedeutet für die horizontal liegende Deckplatte streifenden Einfall. Dieser Punkt ist mit 0 bezeichnet und wird im folgenden nicht benutzt, da er durch das verwendete Sendeaggregat nicht mehr erregt werden konnte. Die Punkte I und V bedeuten dagegen senkrechten Einfall ($\vartheta = 0$); die übrigen Knotenpunkte, außer III und VII, welche streifenden Einfall kennzeichnen, sind mit Einfallswinkeln behaftet, deren Größen aus der Abb. 4 zu entnehmen sind. Ferner läßt sich leicht einsehen, daß für die beschriebene Anordnung der Lautsprecher und Mikrophone die Knotenpunkte I, III, IV, V und IX gleichphasig, die Punkte II, VI, VII und VIII aber gegenphasig erregt und abgehört werden müssen, um die benachbarten Frequenzen zu unterdrücken. Abb. 5a zeigt das vom NEUMANN-Schreiber aufgezeichnete Spektrum, einmal für die Meßpunkte mit gleich- und einmal mit gegenphasiger Anregung; Abb. 5b zeigt den bereits erwähnten Frequenzgang der Apparatur. Die Differenz beider Aufzeichnungen kenn-

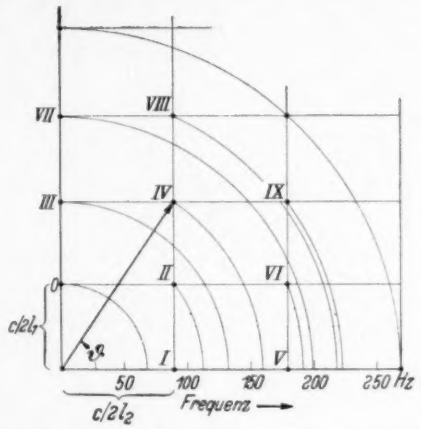


Abb. 4. Eigentonnetz der untersuchten Hallkammer

[8]) Für diese Unterstützung gebührt der HELMHOLTZ-Gesellschaft mein besonderer Dank.

zeichnet das Spektrum des Raumes. Die Kurven wurden dadurch gewonnen, daß das Quecksilber des Summers durch eine Kapillare gleichmäßig und langsam abfloß.

Der benutzte leere Raum hat im betrachteten Frequenzgebiet eine mittlere Dämpfung von $\delta = 2{,}3$; die mittlere Nachhalldauer beträgt somit etwa 3 Sekunden. Dieser Wert liegt

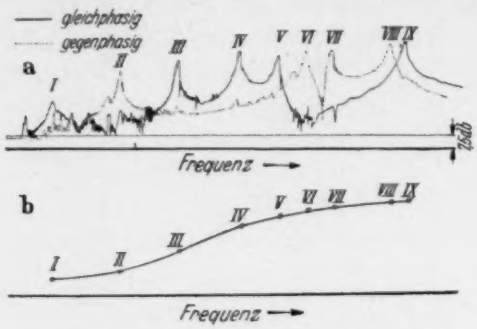


Abb. 5a u. b. Frequenzspektren:
a) für Gesamtanordnung einschließlich Hallkammer,
b) für Lautsprecher und Mikrophon allein

für den kleinen Raum von nur 1,3 m³ erstaunlich hoch.

Die ersten der ca. 500 Aufnahmen, die für diese Arbeit gemacht wurden, ließen eine nur unsichere Bestimmung des Dämpfungsfaktors zu. In erster Linie machten sich starke Schwebungen bemerkbar, insbesondere bei Benutzung nur eines Mikrophons und eines Lautsprechers. Die benachbarten Eigentöne waren also stark genug, besonders bei den dichter liegenden höheren Frequenzen, den exponentiellen Verlauf der Ausschwingkurve zu stören. Bei Hinzunahme des zweiten Lautsprechers und Mikrophones, zunächst ohne elektrischen Abgleich, später durch Amplituden- und Phasenreglung mit diesem, ließen sich die mit VIII und IX bezeichneten Eigentöne, die weniger als 5 Hz voneinander entfernt liegen, leicht trennen, da der eine den gleich-, der andere den gegenphasigen Typen zugehört. Abb. 6a—c zeigt an einem Beispiel den Unterschied: Für den Meßpunkt VIII sind untereinander die Nachhallkurven a) mit nur einem Lautsprecher und einem Mikrophon, b) mit zwei Lautsprechern und zwei Mikrophonen, c) mit zusätzlichem elektrischen Abgleich dargestellt. Während in Abb. 6a eine überaus starke Schwebung mit Meßpunkt IX zu beobachten ist, wobei die Schwebungsfrequenz der Frequenzdifferenz VIII gegen IX entspricht, ist in Abb. 6b nur noch eine Andeutung der Schwebung zu erkennen. Abb. 6c endlich zeigt eine praktisch vollkommen glatte Abklingkurve.

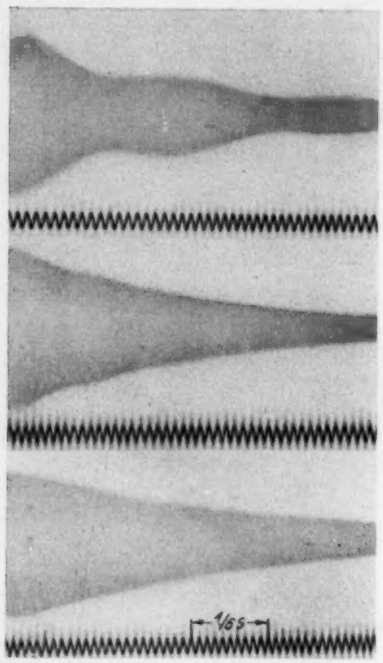


Abb. 6a—c. Nachhallkurven der Hallkammer für den Eigenton VIII (etwa 220 Hz)
a) mit einem Lautsprecher und einem Mikrophon,
b) mit zwei Lautsprechern und zwei Mikrophonen
c) mit zusätzlichem elektrischen Abgleich

Bei Prüfstoffen mit starkem Schluckvermögen sind die Schwebungen verständlicherweise stärker als bei solchen mit kleinem Schluckgrad; denn die mit jenen verbundene größere Resonanzbreite hat eine stärkere Überdeckung der Eigentöne zur Folge.

Weiterhin wurde, wie bereits angedeutet, die Dämpfung der leeren Hallkammer dadurch herabgesetzt, daß schalldichtere Lautsprecher eingebaut wurden. Dagegen konnte an einer größeren Anzahl von Vergleichsmessungen gezeigt werden, daß kleine spaltförmige Öffnungen, die z. B. an der Gummidichtung künstlich hervorgerufen wurden, keinen Ein-

fluß auf die Dämpfung der Hallkammer haben.

Um zu sehen, wie weit das Mitschwingen der Längswände auf die Dämpfung von Einfluß ist, wurde die eine Längswand auf die doppelte Stärke gebracht. Der Erfolg zeigte sich jedoch als fragwürdig. Während einige Eigentöne eine Verringerung der Dämpfung erfuhren, spaltete sich der mit VI bezeichnete Eigenton auf. Dieses Doppelmaximum ist in Abb. 5a deutlich zu erkennen. Wie sich aus Körperschallversuchen zeigen ließ, ist eine Eigenfrequenz der Wände in der Nähe des Eigentones VI hierfür verantwortlich. In der Zahlentafel I ist für den ungedämpften Raum in Spalte 1 eine Meßreihe der Nachhallzeiten in Sekunden vor der Verstärkung der Wand eingetragen. Spalte 2 gibt eine Meßreihe kurz nach erfolgter Wandverstärkung wieder, während in Spalte 3 Nachhallzeiten nach erfolgter Austrocknung der verstärkten Wand zu erkennen sind. Die Meßergebnisse waren an den einzelnen Versuchstagen durchaus reproduzierbar. Eine Nacheichung des leeren Raumes ist also von Zeit zu Zeit unbedingt vorzunehmen.

Zahlentafel I

Nachhallzeiten in sec der leeren Hallkammer in drei Bauzuständen

Eigenton	1	2	3
II	4,1	2,45	2,6
III	4,0	5,1	3,65
IV	3,4	4,1	3,0
V	3,3	4,9	3,3
VI	3,6	2,0	2,35
VII	3,1	3,5	3,15
VIII	2,0	3,5	2,5
IX	2,5	3,4	2,8

Sowohl die beiden Mikrophone als auch die zwei Lautsprecher sind weder elektrisch noch akustisch völlig gleich. Oszillogramme, die für verschiedene Kombinationen (Mikrophon 1 mit Lautsprecher 1; Mikr. 2 mit Lautspr. 1; Mikr. 1 mit Lautspr. 2; Mikr. 2 mit Lautspr. 2 usw., auch für je zwei Mikrophone und Lautsprecher in gleich- oder gegenphasiger Schaltung) aufgenommen wurden, zeigten zunächst ganz beträchtliche Phasen- und Amplitudenunterschiede. Nach zusätzlichem elektrischen Phasen- und Amplitudenabgleich ließen sich eindeutige Abweichungen nicht mehr beobachten. Solche hätten von ungleichmäßiger Schallverteilung in der Hallkammer herrühren können, dadurch bedingt, daß das jeweils benachbarte Mikrophon von dem Lautsprecher der gleichen Raumseite möglicherweise stärker als von dem gegenüberliegenden erregt wird. Nach den Versuchen ist jedoch die Schallverteilung im leeren Raume offenbar genügend gleichmäßig.

IV. Die Meßergebnisse

1. Die gedämpfte Hallkammer mit porösen Schluckstoffen auf starrer Wand

Die weitaus meisten Messungen wurden (von Untersuchungen am leeren Raume abgesehen) an einer Leichtbauplatte, Marke „Mando“[9]), durchgeführt. Es handelt sich um eine etwa 13 mm starke Platte aus Holzfaserstoff mit mäßiger Porigkeit. Für die grundlegenden Untersuchungen schien ein solcher Stoff besonders geeignet, da seine Schluckfähigkeit weder einen zu geringen Effekt noch über die Leistungsgrenze des Verfahrens gehende Schluckwerte erwarten ließ.

Die rohe Platte wurde mit Holzschrauben im Deckel der Hallkammer praktisch ohne Luftzwischenraum, also satt aufliegend, befestigt.

Die Maxima ließen sich am fein einstellbaren Summer recht gut finden und auch konstant halten. Der aus einer Gruppe von je vier Meßreihen ermittelte „mittlere Fehler“ der Einzelmessung des unsichersten Ergebnisses betrug etwa 6%; das bedeutet eine Unsicherheit von 0,06 sec bei Bestimmung der Nachhalldauer des gedämpften Raumes. Die Genauigkeit des Verfahrens liegt jedoch niedriger, da beim ungedämpften Raume etwa 25% mittlerer Fehler auftreten. Ein resultierender mittlerer Fehler der einzelnen unsichersten Messung von mehr als 20% dürfte jedoch kaum

[9]) Von der Firma Werner Genest GmbH., Berlin-Neukölln, freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

zu erwarten sein, da das Verhältnis der Dämpfungsfaktoren des gedämpften zum ungedämpften Raume im Mittel etwa 3 : 1 beträgt. Das Ergebnis bedeutet eine größte Unsicherheit von 0,2 sec Nachhalldauer. Diese Genauigkeit ist für Nachhallmessungen, insbesondere bei den extrem tiefen Frequenzen als recht günstig zu bezeichnen.

In Abb. 7 sind in Abhängigkeit von der Frequenz die Schluckexponenten s' eingetragen. Eine Gesetzmäßigkeit ist scheinbar zunächst nicht zu erkennen. Aus der Theorie

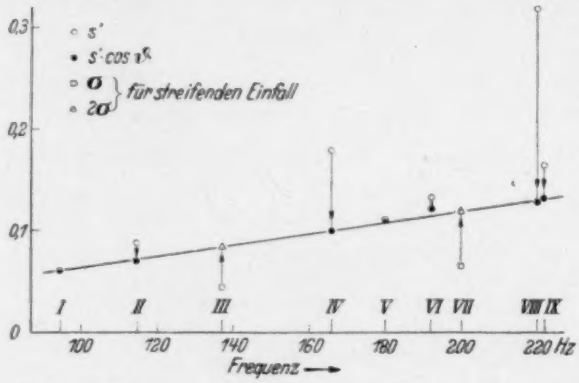


Abb. 7. Gemessene Schluckexponenten s' und Rechenwerte $s' \cdot \cos \vartheta$ für die 13 mm starke Holzfaserplatte „Mando" mit Kennzeichnung der Werte für streifenden Einfall

des Nachhalls ist jedoch bekannt[1]), daß das Gesetz

$$s' \cos \vartheta = s'_0 , \tag{8}$$

das sog. cos ϑ-Gesetz, erfüllt sein müßte, wenn die Nachhallzeit unabhängig vom Einfallswinkel werden soll. Es besagt, daß das Produkt aus dem Schluckexponenten und dem Kosinus des Einfallswinkels (bei festgehaltener Frequenz) annähernd eine Konstante ist. Bildet man also das Produkt $s' \cdot \cos \vartheta$ und trägt man diese Werte auf, so entsteht mit guter Annäherung die in Abb. 7 eingezeichnete monoton wachsende Kurve. Diese Kurve erscheint in der vorliegenden Darstellung fast als Gerade. Dadurch ist besonders gut die Eingliederung der Werte $s' \cdot \cos \vartheta$ in eine nur von der Frequenz abhängige Kurve, die nach der Theorie den Schluckgrad für senkrechten Einfall kennzeichnet, zu erkennen. Das cos ϑ-Gesetz ist somit für den untersuchten Schluckstoff erfüllt, was immer dann zu erwarten ist, wenn, wie im vorliegenden Falle, der Wandwiderstand groß gegenüber dem Wellenwiderstand der Luft ist. Dies Ergebnis bestätigt erstmalig experimentell diese bisher nur theoretisch vorhergesagte Gesetzmäßigkeit.

Wie schon erwähnt, verliert die mit Einfallswinkel und Schluckgraden arbeitende „Strahlenbetrachtung" bei streifendem Einfall ihre Anwendbarkeit. Da aber nach (2) bedeutet:

$$s' \cdot \cos \vartheta = \delta \cdot \frac{4\, l_2}{c} , \tag{2a}$$

so ist es sinnvoll, den bei streifendem Einfall gemessenen Wert von

$$\delta_{90} \cdot \frac{4\, l_2}{c} = \sigma \tag{9}$$

mit den $s' \cdot \cos \vartheta$-Werten zu vergleichen. In diesem Sinne sind in Abb. 7 auch die σ-Werte bei den Meßpunkten III und VII eingetragen (□). Sie liegen deutlich unter der aus den $s' \cdot \cos \vartheta$-Werten gebildeten Kurve. Nach den Ausführungen zu Formel (4) und (5) ist zu erwarten, daß sie auf halber Höhe unter dieser Kurve liegen. Wie die durch (Δ) gekennzeichneten Werte von $2\,\sigma$ zeigen, ist auch dies mit guter Annäherung der Fall. Es bestätigt sich somit bei diesem Material das Gesetz, daß der Dämpfungskoeffizient δ für streifenden Einfall nur halb so groß ist wie derjenige für alle anderen Einfallswinkel[5]).

Zahlentafel II

Schluckgrade s in % der drei porösen Stoffe ohne Luftpolster

Eigenton	1 Holzfaserplatte „Mando"	2 Holzwolle-platte	3 Schlacken-wollepressung
I	6,0	2,55	10,6
II	8,5	4,35	10,4
III	—	—	—
IV	16,7	9,1	37,0
V	10,6	4,0	20,5
VI	12,5	4,65	24,5
VII	—	—	—
VIII	27,5	20,0	73,0
IX	15,5	7,3	50,5

In der Zahlentafel II sind die Schluckgrade in %, d. h. der nichtreflektierte Anteil der auffallenden Schallenergie, zusammengestellt.

Zahlentafel III

Phasensprünge an der Holzfaserplatte „Mando"

Eigenton	Eigenfrequenz der leeren Kammer in Hz	Eigenfrequenz der gedämpften Kammer in Hz	Phasensprung in °
I	94,5	91,6	—15,1
II	114	110,	—20,8
III	137	135,	0
IV	166	161,	—44
V	180	176,	—15,7
VI	192	187,	—21,9
VII	200	200,	0
VIII	—	—	—
IX	222	218,	—15,7

Die Zahlentafel III zeigt den Phasensprung vor der Wand. Besonders bemerkenswert sind die Eigentöne mit streifendem Einfall, Punkt III und VII. Hier tritt kein Unterschied zum leeren Raume auf. Aus der Zahlentafel III geht ferner hervor, daß nur negative Phasensprünge auftreten, d. h. der Blindanteil des Wandwiderstandes hat kapazitiven Charakter[10]). Der Phasensprung verzerrt natürlich das Eigentonnetz, wobei die tieferen Frequenzen ($n_2=1$) besonders stark betroffen werden. Bei „Mando" wird z. B. für Meßpunkt II und einen Phasensprung $\gamma \approx -21^0$ der Einfallskosinus um etwa 12% größer, also ϑ um etwa $4{,}5^0$. Für Eigentöne mit größerem n_2 ist die Abweichung geringer.

Als zweiter Schluckstoff wurde eine Holzwolleplatte benutzt, 25 mm stark, gipsgebunden, die in derselben Weise im Deckel der Hallkammer befestigt wurde. Die Schluckexponenten s' für diese Platte sind in Abb. 8 eingetragen. Die $s' \cdot \cos\vartheta$-Werte liegen im Gegensatz zur Holzfaserplatte nicht so gut auf einer monoton wachsenden Kurve. Für diese Stoffe kann auch das $\cos\vartheta$-Gesetz nicht mehr gelten, da das Produkt aus Wandwiderstand W und Einfallskosinus $\cos\vartheta$ nicht mehr groß gegen den Wellenwiderstand Z der Luft ist. Besonders große Abweichungen sind gegen schrägen Einfall zu erwarten. Die untersuchte Holzwolleplatte ist übrigens das gleiche Material, wie es für die Schluckgradvergleichsmessungen[11]) benutzt worden ist, mit denen eine Vergleichsbasis für die Schallschluckmessungen einzelner akustischer Laboratorien gefunden werden sollte. In Abb. 8 sind Meßwerte für unseren tiefen Frequenzbereich zum Vergleich eingetragen. Diese Werte gelten für senkrechten Einfall und wurden am Kundtschen Rohr gewonnen. Sie liegen erheblich über unseren $s' \cdot \cos\vartheta$-Werten, mit denen sie zu vergleichen sind.

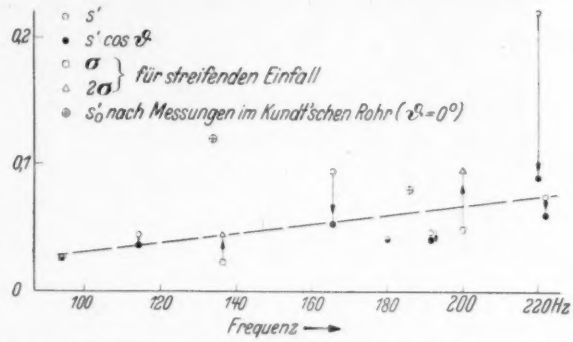


Abb. 8. Meßwerte wie Abb. 7 für die 25 mm starke, gipsgebundene Holzwolleplatte (Schluckstoff der Schallschluckvergleichsmessungen nach Meyer und Schoch)

Zahlentafel IV

Phasensprünge an der Holzwolleplatte

Eigenton	Eigenfrequenz der leeren Kammer in Hz	Eigenfrequenz der gedämpften Kammer in Hz	Phasensprung in °
I	87	85	— 8,2
II	109,5	105,5	— 21,4
III	130,5	130,5	0
IV	156,5	155	— 9,45
V	173,5	171	—12,6
VI	188	181	—31,6
VII	190	190	0
VIII	208	205	—15,9
IX	213	208	—25,2

Zahlentafel IV enthält die Phasensprünge. Auch hier werden für den streifenden Einfall, Meßpunkt III und VII, keine Eigenfrequenzverschiebungen beobachtet. Zahlentafel II, Spalte 2, gibt die Schluckgrade dieses Stoffes wieder.

[10]) L. Cremer, Elektr. Nachr.-Techn. 10 (1933), S. 242. Elektr. Nachr.-Techn. 12 (1935), S. 333.

[11]) E. Meyer u. A. Schoch, Akust. Z. 4 (1939), S. 51.

Als dritter Schluckstoff wurde eine 45 mm starke Platte aus Schlackenwolle-Pressung gemessen. Für diesen Stoff sind die Meßergebnisse selbst mit geringer Genauigkeit behaftet, da die bei der großen Dämpfung stark ineinanderfließenden Resonanzkurven eine nur mäßige Trennung der Eigentöne zuließen. Das Meßverfahren hat hinsichtlich der Größe der Schallschluckung hier seine obere Grenze erreicht. Aus Abb. 9 sind die Meßergebnisse für

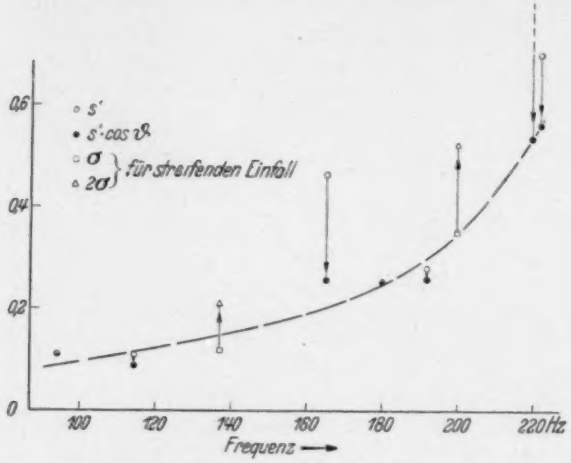


Abb. 9. Meßwerte wie Abb. 7 für die 45 mm starke Schluckplatte aus Schlackenwollepressung

diesen Schluckstoff zu entnehmen. Die Voraussetzungen des cos ϑ-Gesetzes sind hier gleichfalls nicht mehr erfüllt. Spalte 3 der Zahlentafel II enthält die Schluckgrade s.

Die Meßpunkte II und VI haben Doppelmaxima, die auf benachbarte Biege-Eigenfrequenzen der Hallkammerwände zurückgehen. Daher liegen auch die Meßwerte für II und VI unter den eigentlich zu erwartenden Werten.

2. Die gedämpfte Hallkammer mit porösen Schluckstoffen vor Luftpolster.

In Abweichung von der bisherigen Anordnung, die Schluckstoffe direkt auf der Wand zu befestigen, wurde ein dichter Friesvorhang in 4 cm Abstand vor der starren Wand angebracht. Dabei ist es nicht gleichgültig, ob die tangentiale Schallausbreitung im Luftpolster ungehindert erfolgen kann, oder ob durch Querunterteilungen, die klein zur Wellenlänge sind, nur wandnormale Schwingungen zugelassen werden[5]). Die Versuche wurden nun in der Weise vorgenommen, daß bei sonst gleichen Verhältnissen einmal eine nichtkassettierte (Abb. 10a) und einmal eine kassettierte (Abb. 10b) Anordnung ausgeführt wurde. Die Kassetten hatten im vorliegenden Falle eine lichte Weite von $10 \times 12{,}5$ cm² und eine Tiefe von 4 cm; die Einlagen bestanden aus Aluminiumstreifen von 4 mm Stärke.

Abb. 10a u. b. Poröser Schluckstoff (dichter Friesvorhang) vor starrer Wand
a) mit nichtkassettiertem Luftpolster
b) mit kassettiertem Luftpolster

In Abb. 11 sind die $s' \cdot \cos \vartheta$-Werte für die kassettierte und die nichtkassettierte Anordnung eingetragen. Das bemerkenswerte Ergebnis bei Kassettierung sind die höheren Werte für schrägeren Einfall (Meßpunkt II, IV, VIII, IX) und besonders für den streifenden Einfall (Meßpunkt III und VII), während bei senkrechtem Einfall (I und V) wie auch bei dem kleinen Einfallswinkel von VI die Meßwerte der beiden Reihen sich nur wenig unterscheiden.

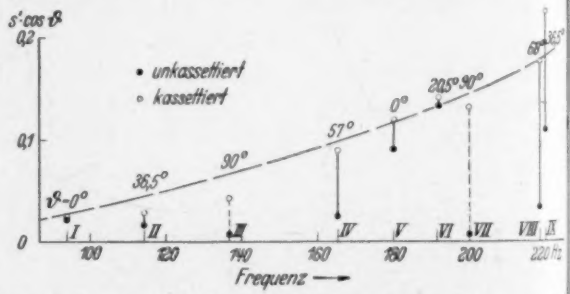


Abb. 11. Vergleichende Darstellung der Werte $s' \cdot \cos \vartheta$ für kassettierte und nichtkassettierte Anordnung mit Kennzeichnung der Werte für streifenden Einfall

Eine solche kassettierte Anordnung hat also für schrägen Einfall, z. B. als Auskleidung in schallführenden Kanälen, gegenüber der nichtkassettierten eine erheblich bessere Schallschluckung. Die Schluckgrade s für beide Anordnungen sind in Zahlentafel V zusammengestellt.

Zahlentafel V

Schluckgrade s in % des Friesvorhanges bei 4 cm Luftpolster

Eigenton	nichtkassettierte Anordnung	kassettierte Anordnung
I	2,6	2,6
II	2,05	3,55
III	—	—
IV	4,3	14,8
V	8,7	11,5
VI	13,6	14,2
VII	—	—
VIII	8,5	35,7
IX	13,0	24,6

Als Ergänzung wurde für eine Versuchsreihe der Fries von der Kassettierung entfernt, so daß nur diese vor dem starren Deckel übrig blieb. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel VI niedergelegt. Mit schrägerem Einfall macht sich ein mäßiger Anstieg der Schallschluckung (mit sehr niedrigen Absolutwerten) bemerkbar. Ein nennenswerter Phasensprung ist nicht zu beobachten.

Zahlentafel VI

Messungen an der Kassettierung ohne Friesvorhang

Eigenton	Eigenfrequenz der ungedämpften Hallkammer in Hz	Eigenfrequenz der Kammer mit offener Kassettierung in Hz	s'	$s' \cos \vartheta$	s in %
I	86,6	86,7	0,02	0,02	2,0
II	110,8	110,9	0,0075	0,006	0,75
III	142,6 (?)	134	—	0,006	—
IV	159,2	159,2	0,028	0,0155	2,8
V	174,5	174,8	0,005	0,005	0,5
VI	188,6	188,6	—	—	—
VII	193,5	192,5	—	0,006	—
VIII	212	208,5	0,0332	0,0135	3,2
IX	212,5	211	0,069	0,0055	0,69

Weiterhin wurde eine Meßreihe mit Fries und 4 cm starkem unkassettierten Luftpolster durchgeführt. An den Schmalseiten des Polsters waren 10 cm breite Streifen aus der bereits beschriebenen Schlackenwollepressung eingebaut. Eine ähnliche Anordnung ist für mitschwingende Schallschlucker von E. Meyer[12]) angegeben worden. Sie wurde dort hauptsächlich zur Verhinderung von Resonanzen in den Hohlräumen hinter der Bespannung benutzt. Die Schluckzahlen sind in Zahlentafel VII zusammengestellt. Die Tendenz hinsichtlich Winkelabhängigkeit ist ähnlich derjenigen mit kassettiertem Luftpolster (Abb. 10, Zahlentafel V). Der Einbau weiterer Streifen vergrößert die Schallschluckung vermutlich.

Zahlentafel VII

Messungen am Friesvorhang mit 4 cm Luftpolster und Randdämpfung

Eigenton	s'	$s' \cdot \cos \vartheta$	s in %
I	0,044	0,044	4,3
II	0,0 (?)	0,0	0,0
III	—	0,0153	—
IV	0,094	0,052	9,0
V	0,1145	0,1145	11,0
VI	0,15	0,14	14,0
VII	—	0,03	—
VIII	0,191	0,0775	17,5
IX	0,165	0,132	15,0

V. Ergänzungen in theoretischer Hinsicht

Das Problem freihängender, poröser Stoffe vor einem Luftpolster wurde für senkrechten Einfall von E. Wintergerst[13]) gelöst. Für genügend schwere und mit mäßigem Strömungswiderstand behaftete Stoffe ist mit genügender Annäherung allein ein Strömungswiderstand R vorhanden. Die Steifigkeit des Luftpolsters wird für senkrechten Einfall bei tiefen Frequenzen angenähert durch $\frac{c^2 \cdot \varrho}{d}$ gekennzeichnet. Bei schrägem Einfall ist diese dagegen nach L. Cremer[5]):

$$\frac{c^2 \varrho}{d \cdot \cos^2 \vartheta} = \frac{K}{d \cdot \cos^2 \vartheta},$$

so daß der Wandwiderstand $\overline{W}$ der nichtkassettierten Anordnung

$$\overline{W} = R + \frac{K}{i \omega d \cos^2 \vartheta} = w + i q \tag{10}$$

wird, also in der elektrischen Analogie einer Serienschaltung von Ohmschem Widerstand und (veränderlicher) Kapazität entspricht. Andererseits besteht zwischen Schluckgrad und

[12]) E. Meyer, Elektr. Nachr.-Techn. 12 (1935), S. 393.

[13]) E. Wintergerst, Schalltechn. 6 (1933), S. 5.

Wandwiderstand die bekannte Beziehung[1]):

$$(11) \qquad s = 1 - \left|\frac{\overline{W}\cos\vartheta - Z}{\overline{W}\cos\vartheta + Z}\right|^2 = \frac{4 \cdot w \cdot \cos\vartheta \cdot Z}{(w \cdot \cos\vartheta + Z)^2 + (q \cdot \cos\vartheta)^2}$$

und mit $w \ll q$, was immer genügend genau erfüllt ist, wird:

$$(12) \qquad s = \frac{4\,w\,Z}{q^2 \cos\vartheta}$$

mit $$\frac{q}{Z} = \frac{1}{k\,d\cos^2\vartheta} \quad \text{ist}$$

$$(13) \qquad s = 4\,\frac{R}{Z}\,(k\,d)^2 \cos^3\vartheta\,.$$

Das Widerstandsverhältnis R/Z für die gegebenen Verhältnisse läßt sich anschreiben:

$$(14) \qquad \frac{R}{Z} = \frac{45{,}6 \cdot 10^4\,(s \cdot \cos\vartheta)}{f^2 \cdot \cos^4\vartheta}\,.$$

Aus dieser Beziehung wurde für den Friesvorhang bei nichtkassettierter Anordnung $w/Z = R/Z = 1{,}63$ als Mittelwert bestimmt. Da $q/Z = 1/k\,d\cos^2\vartheta \geq 1/k\,d = 5{,}88$ ist, zeigt sich übrigens die Bedingung $w \ll q$ als genügend genau erfüllt.

Aus (13) folgt eine quadratische Frequenzabhängigkeit für s.

Für das kassettierte Luftpolster liegen die Dinge insofern anders, als der Wandwiderstand W, bedingt durch nur wandnormale Schwingungsrichtung im Luftpolster, die einfache Form

$$(15) \qquad \overline{W} = R + \frac{K}{i\,\omega\,d} = w + i\,q'$$

annimmt. Ausgehend von (12), wobei auch $w \ll q'$ gültig ist, wird

$$(16) \qquad \frac{R}{Z} = \left(\frac{c}{2\,\pi\,d}\right)^2 \frac{s \cdot \cos\vartheta}{4 \cdot f^2} = 45{,}6 \cdot 10^4\,\frac{s \cdot \cos\vartheta}{f^2}\,.$$

Aus dieser Beziehung wurde für den Friesvorgang bei der kassettierten Anordnung $R/Z = 1{,}68$ als Mittelwert bestimmt. Die Übereinstimmung mit dem $R/Z = 1{,}63$ für die nichtkassettierte Anordnung ist recht gut.

Die Formel (16) gibt uns ferner die Möglichkeit, eine mittlere Parabel der $s \cdot \cos\vartheta$-Werte in Abb. 11 einzuzeichnen, bei der $R/Z = 1{,}65$ gesetzt wurde. Die Streuung ist für die nur angenähert richtige Parabel erträglich. Die Werte des streifenden Einfalls fallen jedoch aus dem Rahmen. Bildet man nämlich für die kassettierte Anordnung

$$(17) \qquad \frac{R}{Z} = 2 \cdot 45{,}6 \cdot 10^4\,\frac{\sigma}{f^2}\,,$$

so wird für den Eigenton III $R/Z = 2{,}21$, für den Eigenton VII $R/Z = 3{,}07$. Die Dämpfung ist augenscheinlich zu hoch. Die Theorie ist hier nicht mehr gültig.

Besonders anschaulich wird die Winkelabhängigkeit der porösen Stoffe vor einem Luftpolster, wenn der Schluckgrad bei konstanter Frequenz in Abhängigkeit vom Einfallswinkel dargestellt wird. Dies kann in der Weise geschehen, daß in (11) die Wandwiderstände $\overline{W}$ für den kassettierten und den nichtkassettierten Fall eingesetzt werden. Für die nichtkassettierte Anordnung wird somit

$$(18) \qquad s = 1 - \left|\frac{\left(\frac{R}{Z}\cos\vartheta - 1\right) - i\,\frac{1}{k\,d\cos^2\vartheta}}{\left(\frac{R}{Z}\cos\vartheta + 1\right) - i\,\frac{1}{k\,d\cos^2\vartheta}}\right|^2.$$

Bei 100 und 200 Hz und für ein mittleres Verhältnis $R/Z = 1{,}65$ ist der Verlauf in Abb. 12

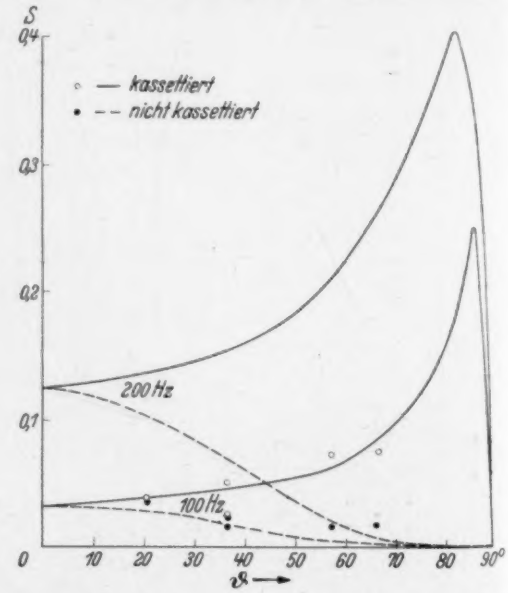


Abb. 12. Theoretisch zu erwartende Winkelabhängigkeit einer Stoffbespannung vor Luftpolstern. Vergleich zwischen kassettierter und nichtkassettierter Anordnung. Die eingetragenen Punkte sind Meßwerte, die auf gleiche Frequenz (100 Hz) reduziert worden sind.

als gestrichelte Kurve zu erkennen. Mit wachsendem Einfallswinkel fällt der Schluckgrad monoton ab.

Für die kassettierte Anordnung wird in gleicher Weise

$$(19) \qquad s = 1 - \left| \frac{\cos\vartheta \left(\frac{R}{Z} - i\,\frac{1}{k\,d}\right) - 1}{\cos\vartheta \left(\frac{R}{Z} - i\,\frac{1}{k\,d}\right) + 1} \right|^2 .$$

(Die Gleichung läßt sich übrigens sehr einfach in dieser Form graphisch lösen.) Der ermittelte Verlauf des Schluckgrades ist gleichfalls in Abb. 12 als ausgezogene Kurve eingetragen. Für $\vartheta = 0$ sind unkassettierte und kassettierte Anordnung verständlicherweise gleichwertig. Mit schrägerem Einfall steigt der Schluckgrad stark an, um für $|\overline{W} \cdot \cos\vartheta| = Z$, also bei vollkommener Anpassung, ein Maximum zu erreichen. Bei weiter wachsendem Einfallswinkel fällt der Schluckgrad auf 0, was der Ausdruck (19) sofort erkennen läßt.

Mit diesen Kurven stimmen die im vorigen Abschnitt beschriebenen Ergebnisse qualitativ überein. Zur quantitativen Kontrolle der gemessenen s-Werte wurden diese, nachdem sie durch Multiplikation mit dem Quadrat des Frequenzverhältnisses auf 100 Hz reduziert worden sind, in Abb. 12 eingezeichnet. Abgesehen von Meßpunkt II (kassettiert), der vermutlich ungenau gemessen wurde, streuen die Meßwerte in befriedigender Weise um die theoretischen Kurven für 100 Hz. (Die hohlen Kreise gehören zur ausgezogenen, die vollen zur gestrichelten Kurve.) In der Nähe des Maximums läßt sich eine Kontrolle nicht durchführen, da bei der vorliegenden Hallkammer größere Einfallswinkel als 68° nicht auftreten.

Zusammenfassung

In einer 2,61 × 1,96 × 0,25 m großen Hallkammer werden die zehn tiefsten Eigenfrequenzen einzeln angestoßen. Eine Fläche 2,61 × 0,25 m des Raumes ist gegen eine solche mit Schallschluckstoff belegte austauschbar. Aus den Abklingkurven der gedämpften und ungedämpften Eigentöne des Raumes berechnen sich die Schluckexponenten, die entsprechend dem jeweiligen Schwingungszustand mit verschiedenen Einfallswinkeln behaftet sind. Das Verfahren gestattet eine bisher nicht durchgeführte Messung winkelabhängiger Schallschluckung bei tiefsten Frequenzen.

Untersucht wurden

1. eine 13 mm starke Holzfaserplatte,
2. eine 25 mm starke, gipsgebundene Holzwolleplatte,
3. eine 45 mm starke Platte aus Schlackenwollepressung,
4. ein dichter Friesvorhang mit 4 cm starkem Luftpolster vor der Wand, kassettiert und nichtkassettiert,
5. die Kassettierung ohne Vorhang

und

6. der Friesvorhang mit Luftpolster und eingebauter Randdämpfung.

An der Holzfaserplatte konnte gezeigt werden, daß das sog. cos ϑ-Gesetz, welches sich aus der Theorie des Nachhalls ergibt, für diesen Stoff gut erfüllt ist. Weiterhin wurde die von der Theorie vorhergesagte Verdoppelung der Nachhallzeit für streifenden Einfall durch die Versuche bestätigt. Endlich wurde der große Einfluß der Kassettierung des Luftpolsters auf die Schallschluckung bei schrägem Einfall experimentell gezeigt und mit der Theorie verglichen.

Die Arbeit wurde im Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Berlin durchgeführt. Dem Leiter des Instituts, Herrn Prof. W. Kucharski, bin ich für seine Unterstützung und für sein freundliches Interesse zu großem Dank verpflichtet. Ferner habe ich Herrn Dr.-Ing. habil. L. Cremer für Stellung der speziellen Aufgabe und fortlaufende Beratung zu danken. Schließlich möchte ich auch Herrn Mechanikermeister E. Heise für die verständnisvolle Mitarbeit bei der Entwicklung der Apparate und für seine Hilfeleistungen bei den Messungen danken.

(Eingegangen am 22. Februar 1940.)

Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen

Von H. Pfriem, VDI

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Berlin-Adlershof, Institut für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik

(Mit 4 Textabbildungen)

Übersicht

Für die relativ hohe Dämpfung der Eigenschwingungen von Gasblasen in Flüssigkeiten wird eine Theorie auf Grund des periodischen Wärmespieles zwischen Gas und Flüssigkeit entwickelt und an Hand von bekannten Meßwerten nachgeprüft. Außerdem ergibt sich aus den Entwicklungen eine Verbesserung der bisher bekannten Beziehung für die Eigenfrequenz einer Gasblase in Abhängigkeit von ihrer Größe.

I. Einführung

Die Schwingungseigenschaften von kleinen kugelförmigen Gasblasen in einer Flüssigkeit wurden neuerdings am Institut für Schwingungsforschung der Technischen Hochschule Berlin von E. Meyer und K. Tamm[1]) experimentell untersucht; insbesondere wurden die Eigenschwingungen und ihre Dämpfung gemessen. Während nun für die Berechnung der Eigenfrequenz einer Gasblase eine durch Versuche hinreichend bestätigte Theorie besteht, ist die rechnerische Erfassung der Dämpfung mit Ausnahme der Schallstrahlungsdämpfung bisher nicht möglich.

Die Dämpfung der Schwingungen einer Gasblase in einer Flüssigkeit kann verschiedene Ursachen zugleich haben. Neben der Schallabstrahlung in die umgebende Flüssigkeit kann beispielsweise eine Dämpfung auftreten durch periodische Ableitung der Verdichtungswärme, durch teilweise Kondensation von im Gas enthaltenen Dämpfen (sowohl im Innern der Blase an Kondensationskernen als auch an ihrer Flüssigkeitsoberfläche), ferner durch periodische Lösung von Gasen in der Flüssigkeit, durch reibungsbehaftete Strömungsvorgänge im Gasraum und in der umgebenden Flüssigkeit sowie durch periodische Änderung der Oberflächenspannung und durch innermolekulare Vorgänge. Von allen diesen Ursachen soll in der vorliegenden Arbeit zunächst nur der durch die endliche Wärmeleitfähigkeit aller Stoffe bedingte Anteil der Dämpfung rechnerisch untersucht werden, wobei die übrigen Ursachen als nicht störend angesehen werden.

Die Rechnung soll ähnlich wie in einer früheren Arbeit des Verfassers[2]) über die thermische Dämpfung in einem ebenen, gasgefüllten Spalt durchgeführt werden. Es sollen also auch hier stationäre Druckschwingungen in der Gasblase vorgegeben und das unter dem Einfluß reiner Wärmeleitung bestehende Temperaturfeld im Gasraum und in der Flüssigkeit berechnet werden. Daraus kann die periodisch vom Gasraum in die Flüssigkeit übergehende Wärmemenge und damit die periodische Änderung des Volumens der Gasblase bestimmt werden. Auf diese Weise sind die jeweils zusammengehörigen Drücke und Rauminhalte der Blase unter dem Einfluß der Wärmeableitung durch die Umgebung bekannt, und es kann daraus dann der thermisch bedingte Anteil der Dämpfung ihrer Schwingungen berechnet werden.

[1]) E. Meyer und K. Tamm, Eigenschwingung und Dämpfung von Gasblasen in Flüssigkeiten. Akust. Z. 4 (1939), S. 145. Herrn Prof. Dr. E. Meyer verdanke ich den Hinweis, daß eine theoretische Klärung dieser Vorgänge wünschenswert ist.

[2]) H. Pfriem, Zur thermischen Dämpfung in Mikrophonluftspalten. Akust. Z. 5 (1940), S. 103.

II. Allgemeine Rechnungsgrundlagen

Für die folgende Rechnung soll stets eine Gasblase in Form einer Kugel vom Halbmesser r_{12} angenommen werden, deren Oberfläche radiale Schwingungen ausführt (Strahler nullter Ordnung). Denkt man sich in dieser Kugel ein Raumelement in Form einer Kugelschale vom

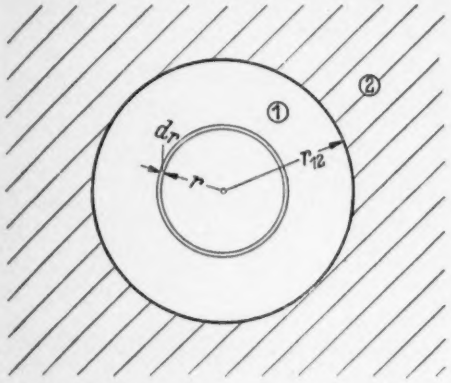


Abb. 1. Kugelförmige Gasblase (1) vom Halbmesser r_{12} in einer Flüssigkeit (2) und Differentialelement in Form einer geschlossenen Kugelschale vom Halbmesser r und der Dicke dr.

Halbmesser r und der Dicke dr, so gilt für die Gewichtseinheit des von ihr umschlossenen Gases der erste Hauptsatz der Wärmelehre[3]) (Satz von der Erhaltung der Energie), z. B. in der Form:

$$dQ = di - A\,v\,dP\,,$$

wobei

Q (kcal/kg)	die je Gewichtseinheit des Gases zugeführte Wärmemenge,
i (kcal/kg)	die Enthalpie der Gewichtseinheit des Gases,
v (m³/kg)	das spezifische Volumen des Gases,
P (kg/m²)	der absolute Druck des Gases und
A (kcal/mkg)	das mechanische Wärmeäquivalent ist.

Die dem Raumelement durch Wärmeleitung zugeführte Wärmemenge ergibt sich nun aus der örtlichen Änderung des Wärmestromes; bei unveränderlicher Wärmeleitfähigkeit findet man so auf die Gewichtseinheit des Gases im Element bezogen für ein kugelsymmetrisches Temperaturfeld die Beziehung[4]):

$$dQ = v \cdot \lambda \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right] d\tau = \frac{v\,\lambda}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r\,\vartheta)}{\partial r^2}\, d\tau\,,$$

wenn

r (m)	der Ortsvektor des im Mittelpunkt der Gasblase verankerten Kugelkoordinatensystems,
τ (h)	die Zeit,
ϑ (° C)	die Übertemperatur des Gases gegenüber ihrem Zeitmittelwert und
$\lambda\left(\frac{\text{kcal}}{\text{mh °C}}\right)$	die Wärmeleitfähigkeit des Gases ist.

Die Änderung der Enthalpie des betrachteten Raumelementes ist je Gewichtseinheit des in ihm enthaltenen Gases:

$$di = c_p \cdot d\vartheta\,,$$

wobei

c_p (kcal/kg °C)	die spezifische Wärme des Gases bei unveränderlichem Druck ist.

Kennzeichnet man noch alle Eigenschaften des Gases mit dem Zeiger 1, die der Flüssigkeit mit 2, so lautet der erste Hauptsatz der Wärmelehre mit den beiden vorstehenden Gleichungen bei kugelsymmetrischem Wärmefluß:

$$\frac{v_1\,\lambda_1}{r} \frac{\partial^2 (r\,\vartheta)}{\partial r^2}\, d\tau = c_{p_1}\, d\vartheta - A\,v_1\, dP\,.$$

Setzt man voraus, daß in der Gasblase nur vernachlässigbar kleine Geschwindigkeiten der Gasteilchen und keine Druckunterschiede auftreten, der Druck hier also eine vorgegebene Funktion nur von der Zeit ist, so lautet danach die das Temperaturfeld im Gasraum beschreibende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial (r\,\vartheta)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 (r\,\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{A\,v_1}{c_{p_1}}\, r \frac{dP}{d\tau}\,, \tag{1}$$

wobei

$a = \frac{v\,\lambda}{c_p}$ (m²/h) die Temperaturleitfähigkeit ist.

Diese Beziehung stellt die Differentialgleichung der Wärmeleitung ohne Konvektion mit örtlich und zeitlich veränderlichen Wärme-

[3]) Vgl. z. B. E. Schmidt, Einführung in die technische Thermodynamik. Springer (1936), S. 27 ff.

[4]) Vgl. z. B. Gröber-Erck, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer (1933), S. 8 ff.

quellen dar[5]); sie ist linear, solange man die Gaseigenschaften als unveränderlich ansehen darf. Da man unter diesen Umständen jede beliebig periodische Druckänderung durch Fourieranalyse in eine Summe von harmonischen Druckschwankungen zerlegen darf, soll nachfolgend nur die Lösung für eine einfache, harmonische Druckschwingung bestimmt werden.

III. Lösung für harmonische Druckschwingungen

Eine harmonische Druckschwingung in der Gasblase mit der Schwingungsweite ΔP und der Kreisfrequenz ω läßt sich durch die nachstehende Gleichung darstellen[6]):

$$P = P_0 + \Delta P \cdot e^{j\omega\tau}, \tag{2}$$

wenn

P_0 der Zeitmittelwert des Druckes in der Blase,

e die Basis der natürlichen Logarithmen und

$j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist.

Damit ergibt sich die Differentialgleichung (1) in der Form:

$$\frac{\partial (r\,\vartheta)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 (r\,\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{A\,v_1}{c_{p_1}} \cdot r \cdot \Delta P\, j\,\omega\, e^{j\omega\tau}. \tag{3}$$

Ein Vergleich der so gefundenen Differentialgleichung (3) mit der entsprechenden Gleichung (3) der vorgenannten Arbeit[7]) zeigt, daß das Kugelproblem damit für das Produkt $(r\,\vartheta)$ auf eine entsprechende, ebene Aufgabe zurückgeführt ist, bei der die harmonisch veränderliche Ergiebigkeit der Wärmequellen zum Abstand r verhältnisgleich ist.

Wie man sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung (3) leicht überzeugt, lautet eine Lösung, die an allen Stellen innerhalb der Gasblase stets eine endliche Übertemperatur liefert:

$$r\,\vartheta = r_{12}\,\vartheta_0 \left\{ \frac{r}{r_{12}} + \frac{1-\varrho_{12}}{2} \frac{e^{\psi_1 r} - e^{-\psi_1 r}}{e^{\psi_1 r_{12}} + \varrho_{12}\, e^{-\psi_1 r_{12}}} \right\}, \tag{4}$$

wenn

ϱ_{12} eine noch zu bestimmende Konstante (die Reflexionszahl der Temperaturwelle),

r_{12} (m) der Halbmesser der Gasblase,

$\psi_1 = \sqrt{\frac{j\omega}{a_1}}$ (1/m) und $\vartheta_0 = \frac{A\,v_1}{c_{p_1}} \cdot \Delta P\, e^{j\omega\tau}$ (°C) die entsprechende Temperaturschwingung in einer absolut isolierten Gasblase ist.

Der Doppelzeiger 12 deutet dabei jeweils auf Eigenschaften der Grenzfläche zwischen den Stoffen 1 und 2.

Damit kann also das harmonisch veränderliche Temperaturfeld im Gasraum als bekannt angesehen werden und es bleibt noch das Feld in der umgebenden Flüssigkeit zu berechnen. Für dieses gilt bei Abwesenheit von Konvektionsströmungen — wie dies bei den betrachteten schnellen Eigenschwingungen der Gasblase mit ausreichender Näherung zutreffen wird — die Differentialgleichung der Wärmeleitung ohne innere Wärmequellen in Kugelkoordinaten:

$$\frac{\partial (r\,t)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 (r\,t)}{\partial r^2}, \tag{5}$$

wenn

t (° C) die Übertemperatur der Flüssigkeit gegenüber ihrem Zeitmittelwert ist.

Die Gleichung für das kugelsymmetrische Temperaturfeld in der Flüssigkeit lautet dann:

$$r\,t = r_{12}\,\vartheta_0 \cdot \frac{1+\varrho_{12}}{2} \frac{e^{\psi_1 r_{12}} + e^{-\psi_1 r_{12}}}{e^{\psi_1 r_1} + \varrho_{12}\, e^{-\psi_1 r_{12}}} \cdot e^{-\psi_2 (r - r_{12})} = r_{12}\, t_{12}\, e^{-\psi_2 (r - r_{12})} \tag{6}$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in die Differentialgleichung (5) überzeugt man sich zunächst, daß sie eine Lösung derselben darstellt. Außerdem erkennt man auch, daß die Randbedingungen an der Oberfläche $r = r_{12}$ der Gasblase erfüllt sind — wo die Temperaturen von Gas und Flüssigkeit gleich (also $\vartheta_{12} = t_{12}$) und außerdem die vom Gas abgegebene gleich der von der Wand aufgenommenen Wärme $\left[\text{also} - \lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)_{12} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{12}\right]$ sein muß — wenn die Reflexionszahl ϱ_{12} an der Kugeloberfläche r_{12} nach der folgenden Beziehung

[5]) Vgl. z. B. GRÖBER-ERCK, a. a. O.

[6]) Bei den folgenden komplexen Gleichungen stellt jeweils der Real- oder Imaginärteil für sich eine physikalische Lösung dar.

[7]) H. PFRIEM, a. a. O.

gewählt wird[8]):

$$(7)\qquad \varrho_{12}=\frac{\lambda_1[\psi_1 r_{12}-\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,(\psi_1 r_{12})]-\lambda_2[\psi_2 r_{12}+1]}{\lambda_1[\psi_1 r_{12}-\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,(\psi_1 r_{12})]+\lambda_2[\psi_2 r_{12}+1]}\,.$$

Damit kann nun die zeitliche Änderung der gesamten, vom Gasraum in die umgebende Flüssigkeit übergehenden Wärmemenge W_{12} berechnet werden, da

$$\frac{dW_{12}}{d\tau}=4r_{12}^2\pi\lambda_1\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{12}=4r_{12}^2\pi\lambda_2\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{12}$$

ist. Man findet so z. B. aus Gleichung (4):

$$(8)\qquad \frac{dW_{12}}{d\tau}=-2r_{12}\pi\lambda_1\vartheta_0(1-\varrho_{12})\frac{(\psi_1 r_{12}-1)\,e^{\psi_1 r_{12}}+(\psi_1 r_{12}+1)\,e^{-\psi_1 r_{12}}}{e^{\psi_1 r_{12}}+\varrho_{12}\,e^{-\psi_1 r_{12}}}\,.$$

Hieraus kann also der zwischen dem Gas in der Blase und der umgebenden Flüssigkeit bestehende, periodische Wärmeaustausch in seiner Größe und Phasenlage relativ zur Druckschwingung im Gasraum berechnet werden. Daher besteht nun auch die Möglichkeit, die Größe und Phasenlage der Raumänderungen der Blase zu berechnen.

IV. Die Schwingungen der Gasblase

Zu den in der bisherigen Rechnung angenommenen Druckschwingungen im Gasraum der Blase und den berechneten Wärmeschwingungen an der Blasengrenze sollen nun noch die zugehörigen Volumenänderungen des Gasraumes berechnet werden. Der erste Hauptsatz der Wärmelehre — auf den gesamten Gasinhalt der Blase angewendet — liefert hierzu eine Bedingung von der Form:

$$(9)\qquad \frac{dW_{12}}{d\tau}=\frac{dU}{d\tau}+A\,P\,\frac{dV}{d\tau}\,,$$

wobei

U (kcal) die innere Energie des gesamten Gases in der Blase und

V (m³) das Volumen der Blase ist.

Mit der Voraussetzung, daß es sich nur um sehr kleine Druckschwingungen im Vergleich zum Zeitmittelwert des absoluten Gasdruckes in der Blase handelt, kann hierin mit guter Näherung $P=P_0=\text{const}$ gesetzt werden. Es bleibt dann nur noch die Änderung der inneren Energie des Gases zu bestimmen, die bei einem idealen Gas aus seiner Temperatur berechenbar ist. Da das Temperaturfeld in der Gasblase auf Grund der bisherigen Berechnungen bekannt ist, ergibt sich die gesamte innere Energie des Gasraumes in einem bestimmten Augenblick als Summe der Energien von allen konzentrisch zueinander liegenden Elementarkugelschalen vom Halbmesser r und der Dicke dr zu:

$$U=\int_0^{r_{12}}4\pi r^2\gamma c_v\vartheta\cdot dr+U_0\,.$$

Hierin ist

γ (kg/m³) das spezifische Gewicht,

c_v (kcal/kg °C) die spezifische Wärme bei konstantem Volumen des Gases in der betrachteten Elementarkugelschale und

U_0 (kcal) der Zeitmittelwert der inneren Energie des gesamten Gasinhaltes der Blase.

Für die vorausgesetzten, sehr kleinen Druckschwingungen und entsprechend auch sehr kleinen Übertemperaturen ϑ können γ und c_v in guter Näherung als unveränderlich angesehen werden; es ist also $\gamma=\gamma_1=\frac{1}{v_1}$ und $c_v=c_{v_1}$. Man erhält dann mit Hilfe von Gleichung (4) die innere Energie des Gasinhaltes der Blase in Abhängigkeit von der Zeit zu:

$$U=\frac{4\pi r_{12}c_{v_1}}{v_1}\vartheta_0\left\{\frac{r_{12}^2}{3}-\frac{1-\varrho_{12}}{2\psi_1^2}\frac{(\psi_1 r_{12}-1)\,e^{\psi_1 r_{12}}+(\psi_1 r_{12}+1)\,e^{-\psi_1 r_{12}}}{e^{\psi_1 r_{12}}+\varrho_{12}\,e^{-\psi_1 r_{12}}}\right\}+U_0\,.$$

Die zeitliche Änderung der inneren Energie der Blase wird dann also mit $c_p/c_v=\varkappa$:

$$\frac{dU}{d\tau}=\frac{4}{3}\pi r_{12}^3\frac{c_{v_1}}{v_1}j\omega\vartheta_0\left\{1-\frac{3}{2}\frac{1-\varrho_{12}}{(r_{12}\psi_1)^2}\frac{(\psi_1 r_{12}-1)\,e^{\psi_1 r_{12}}+(\psi_1 r_{12}+1)\,e^{-\psi_1 r_{12}}}{e^{\psi_1 r_{12}}+\varrho_{12}\,e^{-\psi_1 r_{12}}}\right\}.$$

[8]) Vgl. bezüglich der Entwicklung der Lösungen: H. Peeiem, Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei periodisch veränderlichen Temperaturfeldern. Ing.-Arch. 6 (1935), S. 120.

Damit ergeben sich die zu den angenommenen Druckschwingungen gehörigen Volumenänderungen der Gasblase aus der Gleichung (9) mit Hilfe von Gleichung (8) zu:

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{4}{3}\pi r_{12}^3 \cdot \frac{c_{v_1} j\omega \vartheta_0}{A P_1 v_1}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{(\psi_1 r_{12})^2}\cdot\frac{(\psi_1 r_{12}-1)e^{\psi_1 r_{12}} + (\psi_1 r_{12}+1)e^{-\psi_1 r_{12}}}{e^{\psi_1 r_{12}} + \varrho_{12} e^{-\psi_1 r_{12}}}\right\}. \tag{10}$$

Durch Integration nach der Zeit ergibt sich hieraus in Verbindung mit der Zustandsgleichung für ideale Gase und mit $AR = c_p - c_v$ das periodisch veränderliche Volumen der Gasblase zu:

$$V_1 - V = \frac{V_1 \vartheta_0}{(\varkappa-1)\,T_1}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{(\psi_1 r_{12})^2}\frac{(\psi_1 r_{12}-1)e^{\psi_1 r_{12}} + (\psi_1 r_{12}+1)e^{-\psi_1 r_{12}}}{e^{\psi_1 r_{12}} + \varrho_{12} e^{-\psi_1 r_{12}}}\right\}, \tag{11}$$

wenn V_1 (m³) und T_1 (°K) die Zeitmittelwerte des Volumens bzw. der absoluten Temperatur der Gasblase sind.

Eliminiert man hierin die in ϑ_0 enthaltene Zeit mit Hilfe der Gleichung (2), so ergibt sich die gegenseitige Abhängigkeit zwischen dem Druck und Volumen der Gasblase. Trägt man die Realteile dieser Funktion in ein P-V-Diagramm ein, so erkennt man anschaulich den vom Gas in der Blase unter dem Einfluß der Wärmeableitung durchlaufenen Kreisprozeß. Die von der Diagrammkurve umschlossene Fläche stellt dabei die je Spiel von den äußeren Kräften zu leistende Arbeit dar, die sich schwingungstechnisch als Dämpfung bemerkbar macht und in Form von Wärme wieder nach außen abgeführt wird. Nachfolgend sollen nur die hier interessierenden Schwingungseigenschaften einer Gasblase näher untersucht werden.

V. Die Schwingungseigenschaften einer Gasblase

Ein Vergleich der bisherigen Ergebnisse mit den Zwangsschwingungen eines masselosen, gedämpften Systems liefert die Schwingungseigenschaften einer Gasblase bei Vernachlässigung ihrer eigenen Masse. Die Differentialgleichung für harmonische Zwangsschwingungen des Volumens einer derartigen gedämpften, masselos gedachten Gasblase unter dem Einfluß von äußeren Druckänderungen lautet nun:

$$K\frac{dV}{d\tau} + C\,V + 4\pi r_{12}^2 \Delta P\, e^{j\omega\tau} = 0, \tag{12}$$

wenn K (kg sec/m³) die Dämpfungskonstante und
C (kg/m³) die elastische Konstante der Gasblase ist.

Die Lösung dieser Differentialgleichung (12) für quasistationäre harmonische Zwangsschwingungen einer Gasblase lautet nun:

$$V_1 - V = \frac{4\pi r_{12}^2 \Delta P\, e^{j\omega\tau}}{C + jK\omega} = \frac{3V_1}{r_{12}}\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{\vartheta_0}{T_1}\frac{P_1}{C+jK\omega}. \tag{13}$$

Vergleicht man diese Beziehung mit Gleichung (11), so ergibt sich eine Bedingung für die Berechnung der elastischen (C) und der Dämpfungskonstanten (K) in folgender Form:

$$\frac{1}{C+jK\omega} = \frac{r_{12}}{3\varkappa P_1}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{(\psi_1 r_{12})^2}\frac{(\psi_1 r_{12}-1)e^{\psi_1 r_{12}} + (\psi_1 r_{12}+1)e^{-\psi_1 r_{12}}}{e^{\psi_1 r_{12}} + \varrho_{12} e^{-\psi_1 r_{12}}}\right\}. \tag{14}$$

Für sehr große Absolutwerte der dimensionslosen Kenngröße ($\psi_1 r_{12}$) der Blase erhält man daraus näherungsweise:

$$\frac{1}{C+jK\omega} \cong \frac{r_{12}}{3\varkappa P_1}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{\psi_1 r_{12}}\right\} \approx \frac{r_{12}}{3\varkappa P_1}. \tag{14a}$$

wenn $|\psi_1 r_{12}| \gg 1$ ist; dabei wird die Reflexionszahl ϱ_{12} nach Gleichung (7), da stets $|\psi_2| > |\psi_1|$ ist:

$$\varrho_{12} \cong \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2},$$

wenn $b = \sqrt{\lambda c_p \gamma}$ (kcal/m² h$^{1/2}$ °C) die Wärmebelastungsfähigkeit eines Stoffes ist.

Für sehr kleine Absolutwerte von $(\psi_1 r_{12})$ ergibt sich andererseits:

$$\frac{1}{C+j\,K\,\omega} \cong \frac{r_{12}}{3\,\varkappa\,P_1}\left\{1+(\varkappa-1)\,(1-\varrho_{12})\,\frac{\psi_1 r_{12}}{1+\varrho_{12}+(1-\varrho_{12})\,\psi_1 r_{12}}\right\} \approx \frac{r_{12}}{3\,P_1}\,, \tag{14b}$$

wenn $|\psi_1 r_{12}| \ll 1$ ist; dabei wird die Reflexionszahl ϱ_{12} nach Gleichung (7):

$$\varrho_{12} \cong \frac{\lambda_1 \frac{(\psi_1 r_{12})^3}{3} - \lambda_2 (\psi_2 r_{12}+1)}{\lambda_1 \frac{(\psi_1 r_{12})^3}{3} + \lambda_2 (\psi_2 r_{12}+1)} \cong -1 + \frac{2}{3}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{(\psi_1 r_{12})^3}{\psi_2 r_{12}+1} \approx -1\,.$$

Zur Berechnung von Zahlenwerten müssen die vorstehenden Gleichungen (14), (14a) bzw. (14b) in Real- und Imaginärteil bzw. Argument und absoluten Betrag getrennt werden. Aus der Gleichheit der Argumente beider Seiten dieser Gleichungen findet man so zunächst nach Gleichung (14) die dimensionslose Kenngröße $\left(\frac{K\omega}{C}\right)$, die bei kleinen Werten mit π multipliziert dem logarithmischen Dämpfungsdekrement der abklingenden Eigenschwingungen einer Gasblase entspricht. Da hier — im Gegensatz zum entsprechenden ebenen Problem — auch die Reflexionszahl komplex wird, ist diese Umrechnung im allgemeinen wesentlich umständlicher.

Für den Sonderfall einer relativ kleinen Wärmeleitfähigkeit bei großer Temperaturleitfähigkeit des Gases in der Blase im Vergleich zu den entsprechenden Werten der sie umgebenden Flüssigkeit kann man die Reflexionszahl mit guter Näherung zu $\varrho_{12} = -1$ annehmen. Dies trifft für die meisten technischen Gase unter atmosphärischen Bedingungen in Wasser zu; für Luftblasen in Wasser ist der dadurch bedingte absolute Fehler im ganzen Bereich kleiner als 1%. In diesem Fall findet man also an Stelle von Gleichung (14) die folgende Beziehung:

$$\frac{1}{C+j\,K\,\omega} = \frac{r_{12}}{3\,\varkappa\,P_1}\left\{1+\frac{3\,(\varkappa-1)}{\psi_1 r_{12}}\left[\mathfrak{Ctg}\,(\psi_1 r_{12}) - \frac{1}{\psi_1 r_{12}}\right]\right\}. \tag{15}$$

Setzt man hierin $\psi_1 = (1+j)\cdot\varphi_1$, wobei $\varphi_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2\,a_1}}$ eine reelle Größe ist und spaltet die rechte Gleichungsseite in reelle und imaginäre Glieder, so erhält man:

$$\frac{1}{C+j\,K\,\omega} = \frac{r_{12}}{3\,\varkappa\,P_1}\left\{1+\frac{3\,(\varkappa-1)}{2\,\varphi_1 r_{12}}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 r_{12} - \sin 2\varphi_1 r_{12} - j\,(\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 r_{12} + \sin 2\varphi_1 r_{12})}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 r_{12} - \cos 2\varphi_1 r_{12}} + \frac{j}{\varphi_1 r_{12}}\right]\right\}. \tag{15a}$$

Aus der notwendigen Gleichheit der Argumente auf beiden Seiten dieser Gleichung ergibt sich die dimensionslose Größe $\frac{K\omega}{C}$ zu:

$$\frac{K\omega}{C} = \frac{\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 r_{12} + \sin 2\varphi_1 r_{12}}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 r_{12} - \cos 2\varphi_1 r_{12}} - \dfrac{1}{\varphi_1 r_{12}}}{\dfrac{2\,\varphi_1 r_{12}}{3\,(\varkappa-1)} + \dfrac{\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 r_{12} - \sin 2\varphi_1 r_{12}}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 r_{12} - \cos 2\varphi_1 r_{12}}}. \tag{16}$$

Für genügend große Werte der dimensionslosen Kenngröße $\varphi_1 r_{12}$ erhält man daraus:

$$\frac{K\omega}{C} \cong \frac{1-\dfrac{1}{\varphi_1 r_{12}}}{1+\dfrac{2\,\varphi_1 r_{12}}{3\,(\varkappa-1)}} \approx \frac{3\,(\varkappa-1)}{2\,\varphi_1 r_{12}}\,, \tag{16a}$$

wenn $e^{2\varphi_1 r_{12}} \gg 1$ ist; für genügend kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ wird andererseits:

$$\frac{K\omega}{C} \cong \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{(2\,\varphi_1 r_{12})^2}{30}\,, \tag{16b}$$

wenn $\left(\frac{\varphi_1 r_{12}}{2}\right)^6 \ll 1$ ist.

Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit den früher für den ebenen Spalt gefundenen zeigt, daß die thermische Dämpfung der Schwingungen von kugelförmigen Gasblasen — wenn man die halbe Spaltweite dem Halbmesser der Kugel gleichsetzt — im Bereich großer Werte von $\varphi_1 r_{12}$ etwa 3mal so groß ist, während sie im Bereich kleiner Werte von $\varphi_1 r_{12}$ wesentlich kleiner ist. Der Größtwert der Dämpfung ist für die Blase etwas kleiner als für den ebenen Spalt und seine Lage verschiebt sich nach größeren Beträgen von $\varphi_1 r_{12}$. Diese Erscheinungen sind physikalisch anschaulich dadurch zu erklären, daß die auf die Volumeneinheit bezogene, wärmeableitende Oberfläche bei einer

Kugel größer als beim ebenen Spalt ist. Dadurch muß die Dämpfung infolge eines größeren, verlustfreien isothermen Verdichtungsbereiches bei kleinen Werten von $\varphi_1 r_{12}$ für die Kugel relativ geringer sein und infolge der beispielsweise mit wachsender Frequenz später erreichbaren, verlustfreien adiabatischen Verdichtung bei großen Werten von $\varphi_1 r_{12}$ für die Kugel relativ größer sein. Der kleinere Maximalwert der thermischen Dämpfung bei einer schwingenden Blase ist durch die relativ geringere Gasmenge bedingt, die je Einheit der Oberfläche an den nichtumkehrbaren Vorgängen beteiligt ist.

In Abb. 2 ist die durch Gleichung (16) gegebene Abhängigkeit in dimensionsloser Form für $\varkappa = 1{,}4$ dargestellt. Wie schon die Gleichungen (16a) und (16b) zeigen, verschwindet die thermische Dämpfung für sehr große und genügend kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ vollkommen. Es bestehen also auch bei der Luftblase — wie beim ebenen Luftspalt — zwei verlustfreie Grenzgebiete, nämlich für die adiabatische und die isotherme Verdichtung des Gases in der Blase.

Neben der Dämpfung ist anch die elastische Eigenschaft (Federung) einer Luftblase physi-

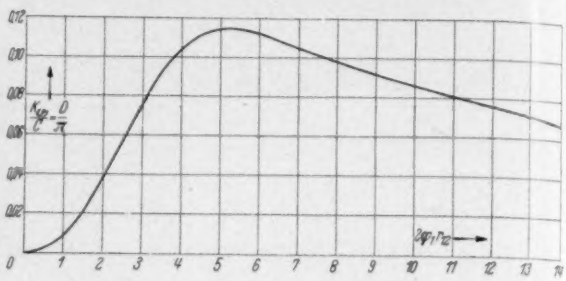


Abb. 2. Abhängigkeit des dimensionslosen Dämpfungsverhältnisses $\left(\frac{K\omega}{C}\right) = \frac{D}{\pi}$ (D logarithmisches Dämpfungsdekrement der Eigenschwingungen einer Gasblase) von der dimensionslosen Kenngröße $2\varphi_1 r_{12} = 2 r_{12}\sqrt{\frac{\omega}{2 a_1}}$ der Blase (a_1 Temperaturleitfähigkeit des Gases.)

kalisch von Bedeutung. Man findet sie durch Vergleich der Realteile auf beiden Seiten der Gleichung (15a) aus der folgenden Beziehung:

$$\frac{1}{C}\,\frac{1}{1+\left(\frac{K\omega}{C}\right)^2} = \frac{r_{12}}{3\varkappa P_1}\left\{1+\frac{3(\varkappa-1)}{2\varphi_1 r_{12}}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 r_{12}-\sin 2\varphi_1 r_{12}}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 r_{12}-\cos 2\varphi_1 r_{12}}\right\}.$$

Da auf Grund der vorausgehenden Entwicklungen die dimensionslose Größe $\frac{K\omega}{C}$ als bekannt angesehen werden darf, erhält man hieraus also die elastische Eigenschaft der Luftblase in dimensionsloser Form:

$$\frac{C r_{12}}{3\varkappa P_1} = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{K\omega}{C}\right)^2\right]\left[1+\frac{3(\varkappa-1)}{2\varphi_1 r_{12}}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 r_{12}-\sin 2\varphi_1 r_{12}}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 r_{12}-\cos 2\varphi_1 r_{12}}\right]}. \tag{17}$$

Für sehr große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ erhält man hieraus

$$\frac{C r_{12}}{3\varkappa P_1} \cong \frac{1}{1+\frac{3(\varkappa-1)}{\varphi_1 r_{12}}\cdot\left(1-\frac{1}{2\varphi_1 r_{12}}\right)} \approx 1 = \frac{C_{ad}\cdot r_{12}}{3\varkappa P_1}, \tag{17a}$$

wenn $e^{2\varphi_1 r_{12}} \gg 1$ ist; für genügend kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ ergibt sich andererseits:

$$\frac{C r_{12}}{3\varkappa P_1} \cong \frac{1}{\varkappa-\frac{(2\varphi_1 r_{12})^4}{1890}\left[1-2{,}1\,\frac{(\varkappa-1)^2}{\varkappa}\right]} \approx \frac{1}{\varkappa} = \frac{C_{is}\cdot r_{12}}{3\varkappa P_1}, \tag{17b}$$

wenn $\left(\frac{\varphi_1 r_{12}}{2}\right)^6 \ll 1$ ist.

Die elastische Eigenschaft einer Gasblase ist also (wie in Abb. 3 dargestellt) mit der dimensionslosen Größe $\varphi_1 r_{12}$ — ganz ähnlich wie die des ebenen Luftspaltes — derart veränderlich, daß für sehr kleine Werte derselben (entsprechend einer isothermen Verdichtung des Gases) ein unterer Grenzwert C_{is} und für sehr große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ (entsprechend einer adiabatischen Verdichtung des Gases) ein oberer Grenzwert C_{ad} erreicht wird.

Auch in der von MINNAERT[9]) angegebenen Beziehung für die Berechnung der Eigenfrequenz einer Gasblase ist diese Veränderlichkeit der Federung zu berücksichtigen; man erhält daher für diese die genauere Beziehung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C g}{r_{12} \gamma_2}} = \frac{\Phi}{r_{12}} \sqrt{\frac{3 \varkappa P_1 g}{\gamma_2}}, \tag{18}$$

wenn

ω_0 (1/sec) die Eigen-Kreisfrequenz der Gasblase,

γ_2 (kg/m³) das spezifische Gewicht der Flüssigkeit,

g (m/sec²) die Erdbeschleunigung,

$\Phi = \sqrt{\frac{C r_{12}}{3 \varkappa P_1}}$ ein von $\varphi_1 r_{12}$ abhängiger dimensionsloser Korrekturfaktor (s. Abb. 3) ist.

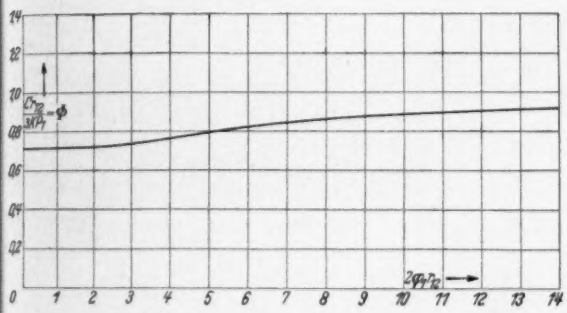


Abb. 3. Abhängigkeit der dimensionslosen elastischen Kennzahl $\frac{C r_{12}}{3 \varkappa P_1} = \Phi^2$ (in der Abbildung wurde versehentlich k statt $\varkappa$ gesetzt) der Blase von ihrer dimensionslosen Kenngröße $2 \varphi_1 r_{12} = 2 r_{12} \sqrt{\frac{\omega}{2 a_1}}$

Nachdem das Verhältnis der beiden Grenzwerte $C_{ad}/C_{is} = \varkappa$ ist, wird der größtmögliche, dadurch bedingte Unterschied in der Berechnung der Eigenfrequenz von Gasblasen $1 - \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$; für Luft ergibt sich also mit $\varkappa = 1{,}4$ eine größte Abweichung von etwa 15%. Für einatomige Gase wird mit $\varkappa = 1{,}67$ die größte Abweichung etwa 23%. Die meßbaren Werte der Eigenfrequenzen von Gasblasen müssen also stets unter der nach MINNAERT berechenbaren Grenzfrequenz liegen. Tatsächlich zeigen auch die meisten von MEYER und TAMM[10]) gemessenen Werte diese Abweichung.

[9]) M. MINNAERT, Phil. Mag. 16 (1933), S. 235.

[10]) E. MEYER und K. TAMM, a. a. O.

VI. Vergleich der Theorie mit praktischen Dämpfungsmessungen

Auf Grund der von MEYER und TAMM[11]) gemessenen Dämpfung von Gasblasen ist eine Nachprüfung der vorausgehenden Entwicklungen möglich. In Abb. 6 dieser Arbeit sind die gemessenen Dämpfungsdekremente abhängig von den gemessenen Eigenfrequenzen der Gasblasen aufgetragen. Es soll nun nachstehend in dieser Darstellung die Gleichung für das Dämpfungsdekrement als Funktion der Eigenfrequenzen der Gasblasen auf Grund der bisherigen Entwicklungen aufgestellt werden. Zu diesem Zweck muß die dimensionslose Kenngröße $\varphi_1 r_{12}$ als Funktion der Eigenfrequenzen der Blasen dargestellt und in Gleichung (16) eingesetzt werden. In Verbindung mit Gleichung (18) erhält man nun mit der Abkürzung: $\sqrt{\frac{C r_{12}}{3 \varkappa P_1}} = \Phi$:

$$\varphi_1 r_{12} = r_{12} \sqrt{\frac{\omega_0}{2 a_1}} = \Phi \cdot \sqrt{\frac{3 \varkappa P_1 g}{4 \pi \gamma_2 a_1}} \sqrt{\frac{1}{f_0}} = \Phi \sqrt{\frac{B}{f_0}}, \tag{19}$$

wenn

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (Hz) die Eigenfrequenz einer Gasblase und

$B = \left[\frac{3 \varkappa P_1 g}{4 \pi \gamma_2 a_1}\right]$ (Hz) eine kennzeichnende Schwingungseigenschaft der Gasblase ist.

Die Größe Φ ist als transzendente Funktion von $\varphi_1 r_{12}$ nach Gleichung (17) bzw. Abb. 3 gegeben und weist eindeutig begrenzte Werte zwischen 1 und $\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$ auf; sie kann praktisch als Korrekturfaktor betrachtet, daher für eine erste Überschlagsrechnung geschätzt und für genauere Rechnungen an Hand von Abb. 3 leicht verbessert werden. Da für bestimmte Gasblasen in einer gegebenen Flüssigkeit B eine unveränderliche Größe ist, erkennt man daraus, daß die dimensionslose Größe $\varphi_1 r_{12}$ für Eigenschwingungen von Gasblasen in erster Näherung der Quadratwurzel aus ihrer Eigenfrequenz umgekehrt verhältnisgleich ist. Dies bedeutet physikalisch, daß man sich mit wachsender

[11]) E. MEYER und K. TAMM, a. a. O.

Eigenfrequenz einer Gasblase in einer Flüssigkeit — entsprechend einem kleiner werdenden Halbmesser der Blase — vom idealen, verlustfreien Grenzfall der adiabatischen Verdichtung des eingeschlossenen Gases mehr und mehr entfernt. Dabei wächst die thermische Dämpfung der Eigenschwingungen der Blase zunächst und ihre Elastizität nimmt langsam ab (vgl. die Abb. 2 und 3). Bei einer bestimmten Frequenz wird dann ein Größtwert der thermischen Dämpfung erreicht. Bei noch höheren Eigenfrequenzen nähert man sich schließlich dem unteren, verlustfreien Grenzgebiet der isothermen Verdichtung des Gases.

Setzt man die Gleichung (19) in die mit π erweiterte Gleichung (16) ein, so erhält man die gesuchte Gleichung für die Abhängigkeit des — durch thermische Wirkungen allein verursachten — Dämpfungsdekrementes dieser Blasenschwingungen von ihrer Frequenz f_0. Dazu kommt noch der durch die Abstrahlung von Schwingungsenergie verursachte Dämpfungsanteil, der berechenbar ist[12]) und den folgenden Wert für das Strahlungsdekrement liefert.

$$(20) \qquad D_s = \frac{\pi \omega_0 r_{12}}{c_2} = \frac{\pi}{c_2} \Phi \sqrt{\frac{3 \varkappa P_1 g}{\gamma_2}},$$

wenn

D_s (0) das Strahlungsdekrement und
c_2 (m/sec) die Schallgeschwindigkeit der Flüssigkeit ist.

Für den von MEYER und TAMM[12]) gemessenen Schwingungsbereich kann man den dargelegten Rechnungsgang durch die schon entwickelten Näherungslösungen für genügend große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ vereinfachen. Man findet so zunächst nach Gleichung (19) in Verbindung mit Gleichung (17a):

$$\frac{\varphi_1 r_{12}}{\Phi} \cong \varphi_1 r_{12} \sqrt{1 + \frac{3(\varkappa - 1)}{\varphi_1 r_{12}} \left(1 - \frac{1}{2 \varphi_1 r_{12}}\right)} \cong \sqrt{\frac{B}{f_0}}.$$

Quadriert man diese Beziehung, so erhält man eine gemischt quadratische Gleichung für $\varphi_1 r_{12}$, deren Lösung lautet:

$$(21) \qquad \varphi_1 r_{12} \cong \frac{3}{2}(\varkappa - 1) \left\{ \sqrt{\frac{3\varkappa - 1}{3(\varkappa - 1)} + \frac{B}{f_0}} - 1 \right\}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß $e^{2 \varphi_1 r_{12}} \gg 1$ ist; bei einem Fehler von weniger als $^1/_2$% muß also sein:

$$3(\varkappa - 1) \left[\sqrt{\frac{(3\varkappa - 1)}{3(\varkappa - 1)} + \frac{B}{f_0}} - 1 \right] \gtrapprox 6.$$

Daraus ergibt sich für den Gültigkeitsbereich der Gleichung (21) die folgende Beziehung:

$$(22) \qquad f_0 \lessapprox \frac{B}{\left(\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\right)^2 - \frac{3\varkappa - 1}{3(\varkappa - 1)}} = \frac{\frac{3 g \varkappa P_1}{4 \pi a_1 \gamma_2}}{\left(\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\right)^2 - \frac{3\varkappa - 1}{3(\varkappa - 1)}}.$$

Für Luftblasen in Wasser unter atmosphärischen Bedingungen wird beispielsweise $B \approx 1{,}75 \cdot 10^6$ Hz; der Gültigkeitsbereich dieser Näherungslösungen erstreckt sich in diesem Fall daher von 0 bis zu etwa 50 kHz.

Setzt man nun das nach Gleichung (21) gefundene Ergebnis in Gleichung (16a) ein, so erhält man für das thermische Dekrement mit der Abkürzung $\frac{3\varkappa - 1}{3(\varkappa - 1)} = m$:

$$(23) \qquad D_{th} = \pi \cdot \frac{K \omega}{C} \cong \frac{\pi}{\sqrt{m + \frac{B}{f_0}}} \left\{ 1 - \frac{2}{3(\varkappa - 1) \left[\sqrt{m + \frac{B}{f_0}} - 1 \right]} \right\}.$$

Entsprechend erhält man mit Hilfe der Gleichungen (17a) und (21) für das Strahlungsdekrement nach Gleichung (20):

$$(24) \qquad D_s = \frac{\pi}{c_2} \sqrt{\frac{3 g \varkappa P_1}{\gamma_2}} \cdot H, \text{ wobei}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{m + \frac{B}{f_0}} - 1} \left[1 - \frac{1}{3(\varkappa - 1) \left[\sqrt{m + \frac{B}{f_0}} - 1 \right]} \right]}}$$

Bei einem Fehler von weniger als $^1/_2$% sind die Grenzen der Gültigkeit dieser Gleichungen (23) und (24) durch Gleichung (22) bestimmt.

In Abb. 4 ist das Strahlungsdekrement D_s nach Gleichung (24) sowie die Summe aus diesem und dem thermischen Dekrement $D_s + D_{th}$ in Abhängigkeit von der Eigenfrequenz für Luftblasen in Wasser durch die ausgezogenen Kurven dargestellt. Außerdem sind die von MEYER und TAMM gemessenen Werte als kleine Kreise eingetragen. Man erkennt, daß die Meßpunkte im unteren Frequenzbereich gut durch die berechnete

[12]) E. MEYER und K. TAMM, a. a. O.

Kurve wiedergegeben werden, während sie im oberen Meßbereich nicht mehr übereinstimmen. Schließt man Meßfehler aus, so bedeutet dies also, daß die Eigenschwingungen von größeren Luftblasen in Wasser ($r_{12} \gtrsim 1$ mm) praktisch nur durch Strahlungs- und thermische Verluste gedämpft werden, während bei kleineren Luftblasen noch andere Einflüsse — wie sie beispielsweise am Anfang dieses Berichtes schon angedeutet wurden — wirksam sein müssen.

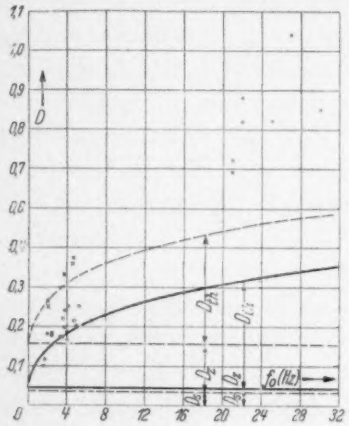


Abb. 4. Vergleich der Rechnung (gezeichnete Kurven) mit Messungen (eingetragene Punkte) von E. MEYER und K. TAMM. Die ausgezogenen Kurven bzw. die kleinen Kreise gelten für Luftblasen in Wasser, die gestrichelten Kurven bzw. die Kreuze gelten für Luftblasen in Glyzerin. Dabei bedeuten:

D_s das logarithmische Dekrement infolge der Schallstrahlung;
D_{th} das logarithmische Dekrement infolge der thermischen Einflüsse und
D_z das logarithmische Dekrement infolge der Zähigkeit.

Über den Einfluß der Zähigkeit kann man dabei noch folgende allgemeine Betrachtung anstellen. Bei allen kugelförmigen Gasblasen von beliebigem Halbmesser sind die durch die Schwingungen verursachten Relativbewegungen der Flüssigkeits- und Gasteilchen ähnlich und können daher zur Geschwindigkeit der Blasenoberfläche verhältnisgleich gesetzt werden. Nun ist aber diese zur Erzeugung einer bestimmten harmonischen Druckschwingung $\Delta P\, e^{j\omega\tau}$ in der Blase erforderliche Radialgeschwindigkeit w der Blasenoberfläche, wie man an Hand von Gleichung (10) leicht zeigen kann:

$$w \cong -\frac{j\,\omega_0 r_{12}}{\Psi} \cdot \frac{\Delta P}{P_1} e^{j\omega\tau} \approx \text{Konst} \cdot e^{j\omega\tau},$$

wobei Ψ eine dimensionslose, praktisch nur wenig veränderliche, komplexe Größe ist.

Für die hier betrachteten Eigenschwingungen von Gasblasen, für die nach Gleichung (18) $\omega_0 r_{12} \cong$ konst ist, gehört also zu einer bestimmten Schwingungsweite des Druckes eine von der Frequenz praktisch unabhängige Schwingungsweite der Radialgeschwindigkeit der Blasenoberfläche. Daher sind auch die Relativgeschwindigkeiten der Flüssigkeits- und Gasteilchen von der Frequenz praktisch unabhängig. Damit ist auch das Verhältnis der durch die Zähigkeit bedingten Dämpfungskräfte je Einheit der Oberfläche zur Druckschwingung praktisch unveränderlich; das hierdurch festgelegte Zähigkeitsdekrement D_z ist demnach — ähnlich wie das Strahlungsdekrement D_s — von der Frequenz der Eigenschwingungen der Gasblasen praktisch unabhängig. Die Zähigkeiten von Flüssigkeit und Gas scheiden daher zur Erklärung der Abweichung der Meßpunkte gegenüber der Rechnung aus.

Zur Bestimmung der Größenordnung des Zähigkeitdekrementes können die Messungen von MEYER und TAMM mit Glyzerin, unter der Voraussetzung, daß der Zähigkeitseinfluß der Luft vernachlässigbar ist, verwendet werden. Berechnet man nämlich das thermische Dekrement für Luftblasen in Glyzerin — das nach den Messungen mit Wasser im Bereich kleiner Frequenzen gut mit den Meßpunkten übereinstimmen dürfte — so findet man Werte, die entsprechend der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Dichten von Glyzerin und Wasser größer sind. Legt man die so in erster Näherung bis auf eine Konstante — der Summe aus dem Strahlungs- und Zähigkeitsdekrement — im Bereich kleiner Schwingungszahlen bekannte Frequenzabhängigkeit des resultierenden Dekrements durch die mit × gekennzeichneten Meßpunkte, so schneidet diese Kurve auf der Ordinatenachse den Wert der im ganzen Bereich praktisch unveränderlichen Summe ab. Da das Strahlungsdekrement nach Gleichung (20) zu $D_s = 0{,}035$ berechenbar ist, ergibt sich so das Zähigkeitsdekrement für Glyzerin zu etwa $D_z \approx 0{,}12$. Die Zähigkeit von Glyzerin ist nun

etwa 500mal so groß wie die von Wasser. Demnach dürfte das Zähigkeitsdekrement für Wasser nur etwa $^1/_{500}$ von dem für Glyzerin sein und ist daher im ganzen Bereich völlig vernachlässigbar.

Eingehendere Berechnungen über die Größe des Einflusses einer periodischen Verdampfung und Kondensation von Wasser an der Blasenoberfläche bzw. an im Gasraum schwebenden Kondensationskernen zeigen, daß hierdurch die noch bestehenden Abweichungen bei hohen Frequenzen nicht erklärt werden können. Über den Einfluß einer periodischen Verdampfung und Kondensation von Wasser an schwebenden Kondensationskernen wird demnächst noch berichtet.

Zusammenfassung

Bei kugelsymmetrischen Schwingungen von Gasblasen treten im Gasraum periodische Druckänderungen und entsprechende Temperaturschwankungen auf. Diese können unter Berücksichtigung der endlichen Wärmeleitfähigkeit des Gases und der Flüssigkeit in ihrer Abhängigkeit vom Ort berechnet werden. Damit besteht die Möglichkeit, das periodische Wärmespiel an der Blasenoberfläche und an Hand des ersten Hauptsatzes der Wärmelehre auch die zu den Druckschwankungen gehörenden Raumänderungen der Gasblase zu bestimmen. Ein Vergleich der so im einzelnen bekannten Schwingungsform der Blase mit entsprechenden Zwangsschwingungen eines masselosen, gedämpften Systems liefert schließlich die Abhängigkeit der dämpfenden und elastischen Größen der Blase von ihren physikalischen Eigenschaften und der Frequenz der Schwingung. Ein Vergleich mit Werten, die bei Eigenschwingungen von Blasen gemessen wurden, ergibt praktisch Übereinstimmung bei tiefen Frequenzen. Die Abweichung bei hohen Frequenzen kann weder durch den Einfluß der dynamischen Zähigkeit noch durch die periodische Verdampfung und Kondensation von Wasser befriedigend erklärt werden.

(Eingegangen am 18. Januar 1940.)

Beeinflussung des Flammpunktes von Mineralölen durch Ultraschallwellen

Von E. Furbach

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

Der Einfluß von Ultraschallwellen auf den Flammpunkt (Fl.P.) von Mineralölen wurde schon früher festgestellt[1]). Dabei wurde besonders die Wirkung von Zusätzen zum Öl während der Schallbehandlung beobachtet. Es wurden Kupfer, Eisen und Zinn dem Öl zugesetzt; auch wurde dieses mit Gasen wie Sauerstoff, Luft und Stickstoff gesättigt, um eine Änderung des Fl.P. herbeizuführen.

Diese Versuche wurden wiederholt und durch weitere ergänzt, um noch offene Fragen, wie die Wirkung anderer Zusätze und die chemischen bzw. physikalischen Vorgänge bei der Flammpunktsänderung zu klären. Es wurden daher verschiedene Mineralöle unter wechselnden Bedingungen mit Ultraschall von der Frequenz 380 kHz behandelt. Der Behälter mit dem Mineralöl wurde in den Sprudel eines Piezoquarzes gebracht, der eine Ultraschallleistung von etwa 200 Watt ausstrahlte. Die Bestimmung des Fl.P. erfolgte mit dem Flammpunktsprüfungsapparat nach Pensky Martens. Die angegebenen Fl.P. sind Mittelwerte aus mindestens drei Messungen.

Zunächst wurde Transformatorenöl mit dem normalen Fl.P. von 149° untersucht. Um einen Anhaltspunkt für die eingestrahlte Schallenergie zu haben, wird in den Tabellen die

[1]) G. Dadakiyo und T. Siraisi, Res. electrotechn. Lab. 430.

Temperaturerhöhung des Öls während der Schallbehandlung angegeben. Zuerst wurde Kupferpulver in fein verteilter Form zugesetzt. Um festzustellen, ob hierdurch schon — ohne daß Ultraschall wirksam ist — eine Verschiebung des Fl.P. eintritt, wurde dieser unmittelbar nach dem Kupferzusatz bestimmt (Tabelle I, Nr. 1). Man erkennt, daß der Fl.P. von 149° auf 144,8° gesunken ist. Da andere Metalle, wie aus Tabelle II hervorgeht, eine derartige Erniedrigung nicht zur Folge haben, scheint hier keine allgemeine physikalische Eigenschaft der Metalle, sondern eine spezifische des Kupfers vorzuliegen, die in einer oxydierenden bzw. sauerstoffübertragenden Wirkung bestehen kann, so daß beim Erwärmen in erhöhtem Maße relativ niedermolekulare Anteile frei werden.

Wird nun eine Probe des Öls mit Kupferzusatz schallbehandelt, so sinkt dadurch der Fl.P. noch weiter (Nr. 2). Neben einer durch den Ultraschall verstärkten oxydierenden bzw. sauerstoffübertragenden Wirkung des Kupfers ist hier als Ursache für das vermehrte Auftreten niedermolekularer Anteile auch eine physikalische Aufteilung größerer Kohlenwasserstoffmoleküle, eine sog. Kettenverkürzung, in Betracht zu ziehen.

Leitet man Sauerstoff 15 Minuten durch Öl, so ergibt die Flammpunktsbestimmung ebenfalls eine Herabsetzung (Nr. 3). Die Erklärung liegt nahe, daß der mit den niedermolekularen Anteilen bei der Flammpunktsprüfung ausgetriebene Sauerstoff das Gasgemisch leichter entzündlich macht. Wird das mit Sauerstoff gesättigte Öl mit Ultraschall behandelt (Nr. 4), so bleibt die vorher gezeigte Erniedrigung der Fl.P. nicht ganz erhalten. Das Ergebnis wird mit der bekannten Entgasung dieser Systeme durch Ultraschall erklärt.

Bei den folgenden Versuchen (Tabelle II) wurde ein Transformatorenöl mit dem normalen Fl.P. von 146° C verwendet. Es wurden zunächst die Fragen geklärt, ob erstens die beim Beschallen auftretende Erwärmung und zweitens das elektrische Feld über dem Quarz schon von Einfluß auf den Fl.P. sind. Das Öl ohne Zusätze zeigt bei Schallbehandlung eine Erhöhung des Fl.P. um 1° (Nr. 1). Dieselbe Erwärmung des Öls im Wasserbad (Nr. 2) ohne Anwendung von Ultraschall ergibt etwa den gleichen Anstieg. Wird der Behälter mit dem Öl 10 Minuten lang in das Kondensatorfeld des Hochfrequenzsenders von 380 kHz gebracht (Nr. 3), ohne daß Ultraschall wirksam ist, so findet eine geringe Erwärmung um 2° statt, der Fl.P. ändert sich aber nur unwesentlich. Das gilt für die Versuche, bei denen ein Glasgefäß verwendet wurde. Bei Metallzusätzen wurde aber wegen der Oxydation der Metallteilchen durch das elektrische Feld ein Metallbehälter benutzt, der das elektrische Feld abschirmte. — Aus den Versuchen Nr. 1—3 ergibt sich also, daß das elektrische Feld auf den Fl.P. praktisch unwirksam ist, während die Erwärmung, die im Schallfeld stattfindet, eine Erhöhung des Fl.P. um etwa 1° hervorruft.

In den nun folgenden Versuchen Nr. 4—11 wird der Einfluß einer Anzahl von Metallen auf den Fl.P. untersucht. Aluminium als Zusatz zeigt ohne Ultraschallbehandlung noch keine Veränderung des Fl.P. (Nr. 4). Die beschallte Probe (Nr. 5) ergibt jedoch einen Anstieg um 2,5°. Zink, Blei und Eisen (Nr. 6—11) haben nur einen geringen Einfluß. Auffallend ist, daß sowohl der Nullversuch als auch die Schallbehandlung bei diesen Metallen im Gegensatz zum Kupfer Tabelle I keine wesentliche Änderung des Fl.P. zur Folge hat. Die spezifische Wirkung, die man beim Kupfer erkennen konnte, tritt bei diesen Metallen nicht auf. Der geringe Anstieg des Fl.P. ist hier allein durch den thermischen Effekt im Ultraschallfeld entsprechend Nr. 2 im Sinne einer erhöhten Wegführung niedermolekularer Anteile beim Beschallen zu erklären.

Bei den Versuchen 13 und 15 ist das Öl vor der Schallbehandlung mit Stickstoff oder Kohlensäure gesättigt worden. In beiden Fällen ist eine Heraufsetzung des Fl.P. zu beobachten, die sich beim Stickstoff nach dem Beschallen noch erhöht. Es dürfte sich hierbei um einen rein physikalischen Vorgang handeln. Durch die Beimengung nicht brennbarer Anteile wird das bei der Flammpunktsprüfung entstehende Gasgemisch schwerer entflammbar. Auch kann die Fortführung niedermolekularer Anteile beim

Tabelle I

Transformatorenöl I mit dem Flammpunkt 149° C

Nr.	Zusätze	Vorbehandlung	Temperatur °C Anf.	Ende	Frequenz kHz	Dauer Min.	Flammpunkt °C
1	Kupfer	—	—	—	—	0	144,8
2	Kupfer	—	17	89,5	380	10	142,2
3	Sauerstoff	15 Min. durch Öl geleitet	—	—	—	0	146,2
4	Sauerstoff	15 Min. durch Öl geleitet	18	51	380	10	147,1

Tabelle II

Transformatorenöl II mit dem Flammpunkt 146° C

Nr.	Zusätze	Behandlung	Temperatur °C Anf.	Ende	Frequenz kHz	Dauer Min.	Flammpunkt °C
1	—	Beschallt	17,5	78,5	380	10	147
2	—	Erwärmung im Wasserbad	19	80	—	10	147,3
3	—	Im elektrischen Feld behandelt	16,5	18,5	380	10	146,5
4	Aluminium	Unbeschallt	—	—	—	—	146
5	Aluminium	Beschallt	19	88	380	10	148,5
6	Zink	Unbeschallt	—	—	—	—	146
7	Zink	Beschallt	19,5	105	380	10	147,7
8	Blei	Unbeschallt	—	—	—	—	145,3
9	Blei	Beschallt	24	93	380	10	146,7
10	Eisen	Unbeschallt	—	—	—	—	146,5
11	Eisen	Beschallt	20	95	380	10	146,5
12	Stickstoff	15 Min. durch Öl geleitet, unbeschallt	—	—	—	—	148,3
13	Stickstoff	15 Min. durch Öl geleitet, dann beschallt	19,5	80,5	380	10	149,3
14	Kohlensäure	15 Min. durch Öl geleitet, unbeschallt	—	—	—	—	149
15	Kohlensäure	15 Min. durch Öl geleitet, dann beschallt	20	62,5	380	10	148,7
16	Stickstoff	Beim Beschallen durch Öl geleitet	17	63	380	10	147,6
17	Sauerstoff	Beim Beschallen durch Öl geleitet	17,5	64,5	380	10	147,3

Gasdurchgang hier eine Rolle spielen. — Im Gegensatz zu den bisherigen Versuchen mit Gasen, bei denen die Sättigung des Transformatorenöls vor der Schallbehandlung erfolgte, soll jetzt gezeigt werden, wie sich das Durchleiten des Gases durch das Öl während des Beschallens auf den Fl.P. auswirkt. In Versuch 16 wurde dabei Stickstoff angewandt. Es ergab sich eine geringere Erhöhung des Fl.P. als bei Versuch 13, die nach Nr. 2 allein durch den thermischen Effekt des Ultraschalles zu erklären ist. Auch Versuch 17 mit Sauerstoff hat ein ganz anderes Ergebnis als der entsprechende mit Sauerstoffsättigung vor der Schallbehandlung (Nr. 3, Tabelle I), bei dem der Fl.P. um etwa 3° erniedrigt wurde. Bei Nr. 17 kommt die Erhöhung des Fl.P. durch die Wärmewirkung des Ultraschalles zustande.

Dagegen kann keine Bereicherung des Systems mit Sauerstoff stattfinden, da die Ultraschallwellen eine sofortige Entgasung bewirken.

Ergebnis

Es wurden Versuche angestellt, um den Einfluß von Ultraschallwellen auf den Flammpunkt von Mineralölen zu ermitteln. Insbesondere wurde dabei die Wirkung von Gasen und Metallen als Zusätze zum Öl geprüft. Es zeigt sich in Übereinstimmung mit früheren Versuchen[1]), daß von den Metallen besonders Kupfer und von den Gasen besonders Sauerstoff den Fl.P. erniedrigen. Beimengungen von Stickstoff und Kohlensäure führen zu einer Erhöhung des Fl.P.

Es wird zur Klärung der Erscheinungen ermittelt, welcher der Ultraschalleffekte für dieses Verhalten des Mineralöls wesentlich ist; dabei zeigt sich: Der thermische Effekt ist zwar von Einfluß auf den Fl.P., er ist aber zu gering, um die Ergebnisse zu erklären. Dagegen ist in einigen Fällen die Entgasung des Öls durch Ultraschall für die Änderung des Fl.P. verantwortlich. Entscheidend ist der Gehalt des Öls an niedermolekularen Anteilen. Höhermolekulare Systeme lassen sich nur wenig durch Ultraschall in bezug auf den Fl.P. beeinflussen. Das Kupfer zeigt eine spezifische Wirkung. Bei seiner Anwesenheit erfolgt im Ultraschallfeld — sei es durch verstärkte Oxydation oder Molekülsprengung — eine Kettenverkürzung, bei der höhermolekulare Anteile in niedermolekulare Anteile umgewandelt werden. Die anderen verwendeten Metalle ergeben diese Eigenschaft nicht. Die flammpunktserhöhende Wirkung des Sauerstoffs ist so zu erklären, daß durch ihn das System mit einem brennbaren Gas angereichert wird. Das elektrische Feld bewirkt keine wesentlichen Flammpunktsänderungen. Die Mineralöle wurden im offenen Gefäß schallbehandelt, weil im geschlossenen Behälter eine Verschiebung des Fl.P. im Sinne einer Flammpunktserniedrigung auftritt, da die niedermolekularen Anteile nicht entweichen können.

Die Inangriffnahme der Untersuchungen erfolgte auf Anregung von Herrn Staatsrat Prof. Dr. A. Esau. In der physikalisch-chemischen Ausdeutung der Versuche wurde ich von Herrn Dr. E. Wiegel vom Laboratorium für organische Werkstoffe und Kolloide der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt beratend unterstützt, wofür ich ihm hiermit meinen Dank sagen möchte.

(Eingegangen am 9. Mai 1940.)

Messung von Schallschluckstoffen und deren Verwendung zur Dämpfung von Rohren*)

Von Jan Harmans

Mitteilung aus den Instituten für Schwachstromtechnik und Fernmeldeanlagen der Technischen Hochschule Dresden

(Mit 32 Textabbildungen)

Übersicht

Das Ziel der Arbeit ist die Untersuchung der Vorgänge beim Schalldurchgang durch Rohre, deren Wandungen aus porösen Schallschluckstoffen bestehen.

Eine praktische Bedeutung hat diese Frage bei der Geräuschminderung in Entlüftungsanlagen, Ventilatorschächten, Auspuffschalldämpfern von Motoren, also überall, wo bei kleinster Behinderung eines Gleichluftstromes eine Schwächung störender Geräusche gefordert wird.

Nach Behandlung des Wandmaterials und experimenteller Feststellung seiner akustischen

*) Genehmigte Dissertation der Technischen Hochschule Dresden.

Eigenschaften wird untersucht, in welcher Weise Wandmaterial und Rohrdimensionen den Gang der akustischen Größen Übertragungsmaß und Wellenwiderstand im Inneren eines schallschluckenden Rohres beeinflussen. Analog der Theorie elektrischer Fernleitungen abgeleitete Gleichungen werden unter der Voraussetzung senkrechten Schalleinfalls in das Wandmaterial aufgestellt und für verschiedene Grenzfälle diskutiert.

Die Messungen ergaben gewisse Abweichungen von der Theorie. Diese werden durch das Eindringen des Schalls in das Wandmaterial unter einem Winkel erklärt, dessen Frequenzgang und Größe bestimmt wird. Ein zwischen Wellen- und Eingangswiderstand bestehender Unterschied wird durch eine Verformung des Schallfeldes am Rohreingang erklärt und anschließend werden einige Richtlinien für den praktischen Aufbau schalldämpfender Rohre gegeben.

1. Das akustische Verhalten poröser Schallschluckstoffe[1][2][3][4]

wie Watte, Filz, Holzfaserstoffe u. a. läßt sich unter folgenden Voraussetzungen leicht berechnen:

1. Das poröse Material sei vollkommen starr.
2. Die in Wirklichkeit regellos angeordneten Poren sollen bei gleichem Querschnitt das Material senkrecht zur Oberfläche und einander parallel durchsetzen.

Die Fortpflanzung einer ebenen Schallwelle in den Poren kann in bekannter Weise analog der Theorie der elektrischen Fernleitungen berechnet werden. Bei unbegrenzter Materialschichtstärke läßt sich die Schallfortpflanzung in der Porenrichtung durch die Gleichungen darstellen. Dabei bedeuten $\mathfrak{P}$ den Schalldruck, $\mathfrak{V}$ die Schallschnelle, R den Strömungswiderstand, ϱ_m die in 1 cm³ des Materials schwingende Luftmasse, $\mathfrak{K} = \frac{1}{\varkappa \cdot p_0}$ die adiabatische Federung der Luft (p_0 = Luftdruck, $\varkappa$ = Verhältnis der spez. Wärmen). Für sinusförmige Schwingungen der Kreisfrequenz ω erhält man nach der Lösung durch die üblichen Ansätze

$$-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} = R \cdot \mathfrak{V} + \varrho_m \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = \mathfrak{K} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \tag{1a}$$

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \cdot e^{-\gamma x} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 \cdot e^{-\gamma x} \cdot e^{j\omega t} \tag{2}$$

für das Übertragungsmaß γ als komplexe Summe von Dämpfungsmaß β und Phasenmaß α

$$\gamma = \beta + j\alpha = \sqrt{(j\omega\varrho_m + R) \cdot j\omega\mathfrak{K}}. \tag{3}$$

Die Trennung von Real- und Imaginärteil liefert

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varrho_m \cdot \mathfrak{K}}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega\varrho_m}\right)^2} + 1}, \tag{4}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varrho_m \cdot \mathfrak{K}}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega\varrho_m}\right)^2} - 1}. \tag{5}$$

Ebenso erhalten wir das an jeder Stelle x gültige Verhältnis von Schalldruck und Schallschnelle, den Wellenwiderstand zu

$$\mathfrak{Z} = z_1 + j z_2 = \frac{\mathfrak{P}_x}{\mathfrak{V}_x} = \sqrt{\frac{j\omega\varrho_m + R}{j\omega\mathfrak{K}}}. \tag{6}$$

Bei einer aus Luft senkrecht zur Oberfläche in das Material eindringenden Schallwelle interessiert der Eingangswiderstand des Materials, der sog. „Wandwiderstand" $\mathfrak{W}$. Er unterscheidet sich vom Wellenwiderstand durch den Wert der Porosität P, die — als Verhältnis von lufterfülltem zu Gesamtvolumen definiert — die Tatsache berücksichtigt, daß die Schallschnelle im Material durch das den wirksamen Querschnitt verkleinernde starre Wandgerüst größer ist:

$$\frac{\mathfrak{Z}}{P} = \mathfrak{W} = \mathfrak{R}_w + j\mathfrak{R}_b. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) ergeben sich die Komponenten

[1]) E. Wintergerst und H. Klupp, Z. VDI. 77, Nr. 4, S. 91.

[2]) L. Cremer, Elektr. Nachr.-Techn. 10 (1933), Heft 6 u. 7; Elektr. Nachr.-Techn. 12 (1935), Heft 10; Elektr. Nachr.-Techn. 13 (1936), Heft 2.

[3]) V. Kühl und E. Meyer, S.-B. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. 26 (1932).

[4]) A. Gemant, Elektr. Nachr.-Techn. 10 (1933), Heft 11.

des Wandwiderstandes zu

$$\Re_w = \frac{Z}{P\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega\varrho_m}\right)^2}+1}\,. \tag{8}$$

$$\Re_b = -\frac{Z}{P\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega\varrho_m}\right)^2}-1}\,. \tag{9}$$

$Z=\sqrt{\varrho/\mathfrak{K}}=42\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}\,sec^{-1}}$ ist der spezifische akustische Widerstand der Luft.

Die ermittelten Größen α, β, $\Re_w$, $\Re_b$ kennzeichnen vollständig das Verhalten des Materials gegen eine senkrecht zur Oberfläche auftreffende ebene Schallwelle:

Aus dem Phasenmaß $\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}$ lassen sich Wellenlänge und Schallgeschwindigkeit c im Material berechnen.

Das Dämpfungsmaß β bezeichnet als Exponent einer e-Funktion die Amplitudenabnahme in der Fortpflanzungsrichtung, bezogen auf die Längeneinheit: $A_x = A_0\cdot e^{-\beta x}$.

Der durch den Wandwiderstand $\mathfrak{W}$ gegebene Reflektionsfaktor $\mathfrak{r}$ bestimmt den Schluckgrad a des Materials, das Verhältnis von nicht reflektierter zu ankommender Schallenergie:

$$a = 1-|\mathfrak{r}|^2 = 1-\left[\frac{|\mathfrak{W}-Z|}{|\mathfrak{W}+Z|}\right]^2. \tag{10}$$

Beim Auftreffen einer ebenen Welle unter dem Winkel φ gegen die Porenrichtung auf das Material wird, da die wirksame Auffallfläche $1/\cos\varphi$ größer wird,

$$a = 1-\left[\frac{|\mathfrak{W}\cdot\cos\varphi-Z|}{|\mathfrak{W}\cdot\cos\varphi+Z|}\right]^2. \tag{11}$$

Für $\cos\varphi=\frac{Z}{|\mathfrak{W}|}$ ist der Wandwiderstand an den Luftwiderstand angepaßt, die gesamte auftreffende Schallenergie wird verschluckt.

Die Gleichungen für α, β, $\Re_w$, $\Re_b$ sind durch die Kenntnis des Strömungswiderstandes R, der Porosität P und der in 1 cm³ des Materials schwingenden Luftmasse ϱ_m eindeutig bestimmt.

R stellt das Verhältnis des Druckabfalles p, den ein Gleichluftstrom über einer Materialprobe der Dicke l hervorruft, zu der Luftgeschwindigkeit v im Inneren dar:

$$R=\frac{P}{v\cdot l}\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}\cdot sec^{-1}}.$$

R ist die bei einer bestimmten Frequenz für alle akustischen Materialeigenschaften maßgebende Größe und hat bei verschiedenen Materialien sehr unterschiedliche Werte (6 bis 15000 cgs gemessen).

Die Porosität P ändert sich nur wenig, ihre Werte liegen zwischen 70 und 90%. P legt die Grenzwerte des Schluckgrades und der Wirkkomponente des Wandwiderstandes für $\omega\to\infty$ fest.

Bei gleichem P ergeben enge Poren großes R, weite Poren kleines R.

Der Wert von R kann durch eine Gleichstrommessung, der von P durch Wägung oder Wasserverdrängung bestimmt werden.

Die wirksame Masse ϱ_m ist im allgemeinen gleich der Luftdichte $\varrho_0=0{,}0013$, höhere ϱ_m-Werte treten bei großen Strömungswiderständen durch Mitschwingen der Materialfasern und eine durch enge Poren bedingte parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung über dem Querschnitt auf.

Der Frequenzgang der Größen α, β, $\Re_w$, $\Re_b$ kann für den gemeinsamen Parameter $\eta=\frac{R}{\omega\varrho_m}$ an Hand der Grenzfälle betrachtet werden. Das Phasenmaß α und das Dämpfungsmaß β sind für $\eta\gg 1$ von gleicher Größe und nehmen mit $\sqrt{\omega}$ zu, für $\eta\ll 1$ wird β frequenzunabhängig, $\alpha=\frac{\omega}{c}$ wie in freier Luft. Die Komponenten des Wandwiderstandes nehmen mit der Frequenz ab und sind für $\eta\gg 1$ von gleicher Größe, für $\eta\ll 1$ nähern sie sich ihren Grenzwerten $\Re_m=\frac{Z}{P}$ und $\Re_b=0$.

Für den praktisch wichtigen Fall des schallhart abgeschlossenen Materials endlicher Dicke l gilt nach der Leitungstheorie für den Eingangsscheinwiderstand:

$$\mathfrak{W}_l = \mathfrak{W}_\infty\cdot\operatorname{ctg}\gamma l \tag{12}$$

oder, da alle Größen komplex sind,

$$\mathfrak{W}_{l_{Re}}+j\,\mathfrak{W}_{l_{Jm}} = (\Re_w - j\,\Re_b)\operatorname{ctg}(\beta+j\,\alpha)\,l\,.$$

Nach Anwendung der hyperbolischen Additionstheoreme läßt sich der Ausdruck in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$\mathfrak{W}_{l_{Re}} = \frac{1}{2}\,\frac{\Re_w\cdot\mathfrak{Sin}\,2\beta l-\Re_b\cdot\sin 2\alpha l}{\mathfrak{Sin}^2\beta l+\sin^2\alpha l}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{W}_{l_{Jm}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Re_w\cdot\sin 2\alpha l+\Re_b\cdot\mathfrak{Sin}\,2\beta l}{\mathfrak{Sin}^2\beta l+\sin^2\alpha l}. \tag{14}$$

Abb. 1 zeigt die in Abhängigkeit von der Frequenz entstehende Ortskurvenschar, die für verschiedene Schichtstärken $D\,(=l)$ aus vorliegenden Meßresultaten von Packwatte berechnet wurde.

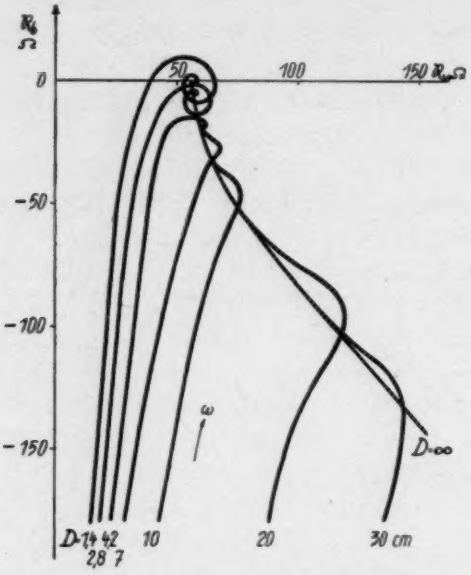


Abb. 1 Ortskurven des Leerlaufwiderstandes von Packwatte ($R = 10{,}7$ cgs; $P = 0{,}75$) in Abhängigkeit von der Frequenz für verschiedene Schichtstärken D

Die Ortskurven nähern sich mit wachsender Frequenz der für unbegrenzte Schichtstärke geltenden Hyperbel und gehen bei um so tieferen Frequenzen in sie über, je größer die Schichtstärke ist. Nach kleineren Schichtstärken zeigen die Ortskurven immer mehr Neigung zu spiraligem Verlauf, da nach höheren Frequenzen immer bessere Verhältnisse für die Ausbildung stehender Wellen im Material geschaffen werden, die durch Rückwirkung ein periodisches Schwanken des Eingangswiderstandes zur Folge haben.

In Abhängigkeit von der Schichtdicke ergeben sich die aus der Kabeltheorie bekannten Spiraldiagramme.

2. Die Messung des Wandmaterials[5])

erfolgt in einem Rohrsystem, als dessen Abschluß eine Materialprobe die Lage und Größe der bei Beschallung im Meßrohr auftretenden stehenden Wellen beeinflußt. Dieser Vorgang wird durch die allgemeinen elektrischen Leitungsgleichungen, die zweckmäßig in der folgenden Form geschrieben werden, erfaßt:

$$(15)\quad \mathfrak{P}_x = \mathfrak{P}_0 \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma x \pm Z \cdot \mathfrak{V}_0 \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma x\,,$$

$$(16)\quad \mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_0 \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma x \pm \frac{\mathfrak{P}_0}{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma x\,.$$

Legt man den Bezugspunkt $x = 0$ an die Stelle eines Schalldruckknotens, so gewinnt man nach Einführung des Wellenverhältnisses $d = \frac{\mathfrak{P}_{min}}{\mathfrak{P}_{max}} = \frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{V}_0 \cdot Z}$ einen allgemeinen Ausdruck für den Scheinwiderstand des Materials, das das Meßrohr in der Entfernung x_2 vom Bezugspunkt abschließt:

$$(17)\quad \mathfrak{R}_{x_l} = \frac{\mathfrak{P}_{x_l}}{\mathfrak{V}_{x_l}} = Z \cdot \frac{d\,\mathfrak{Cof}\,\gamma x_l - \mathfrak{Sin}\,\gamma x_l}{\mathfrak{Cof}\,\gamma x_l - d \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma x_l}.$$

Die Gleichung berücksichtigt die kleine Eigendämpfung β des Meßrohres und liefert unter der Voraussetzung $\beta x \ll 1$ eine vereinfachte Lösung für die Komponenten des akustischen Abschlußwiderstandes:

$$(18)\quad \mathfrak{R}_w = Z \cdot \frac{d - \beta x_l}{(d - \beta x_l)^2 \sin^2 \alpha x_l + \cos^2 \alpha x_l},$$

$$(19)\quad \mathfrak{R}_b = Z \cdot \frac{[(d - \beta x_l)^2 - 1] \cdot \sin \alpha x_l \cos \alpha x_l}{(d - \beta x_l)^2 \cdot \sin^2 \alpha x_l + \cos^2 \alpha x_l}.$$

Für die Auswertung ist die Kenntnis des Wellenverhältnisses $d = \frac{\mathfrak{P}_{min}}{\mathfrak{P}_{max}}$, der Entfernung x_l des Schalldruckknotens vom Abschluß und der Eigendämpfung β des Meßrohres erforderlich. Die Differenz $d - \beta x_l$ liefert den Anteil des Abschlußwiderstandes am Wellenverhältnis d. Die Bestimmung der Rohrdämpfung β geschieht durch den Leerlaufversuch: An Stelle des Schallschluckstoffes wird das Meßrohr mit einer starren Platte abgeschlossen, so daß der Nenner der Gleichung 17 gleich null gesetzt werden muß, also $\mathfrak{Cof}\,\gamma x_2 = d\,\mathfrak{Sin}\,\gamma x_2$ wird. Beachtet man, daß beim Leerlaufversuch x_l stets $n \cdot \frac{\lambda}{4}$ $(n = 1, 3, 5 \ldots)$ sein muß, und setzt wieder $\beta x \ll 1$ voraus, so folgt für die Eigendämpfung des Meßrohres:

$$(20)\quad \beta = \frac{d}{x_l}.$$

Der Verlauf der stehenden Wellen im schallhart abgeschlossenen Meßrohr bei Vorhandensein einer kleinen Eigendämpfung β ist in Abb. 2

[5]) O. Schmidt, H. u. E. 41, Heft 1.

aus einlaufender und reflektierter Welle konstruiert und dargestellt.

Als Nutzanwendung ergibt sich für die rohrakustische Scheinwiderstandsmessung die Bedingung, daß bei der Bestimmung des Wellenverhältnisses d entweder nahe an den Abschluß gegangen oder daß die Eigendämpfung des Meßrohres vom Radius r von sich aus klein gehalten werden muß. Letzteres erreicht man durch Verwendung weiter Rohre, da die Rohrdämpfung der KIRCHHOFFschen Gleichung[6]) $\beta = 3{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\sqrt{f}}{r}$ folgt. Günstig ist ferner eine möglichst hohe Meßfrequenz f, da die Größe βx_l mit wachsender Frequenz abnimmt, die Meßstelle also näher an den Abschluß rückt und das Verhältnis Abschluß- zu Rohrdämpfung größer wird, da poröse Schallschluckstoffe einen im allgemeinen mit der Frequenz wachsenden Schluckgrad besitzen. Die obere Grenze liegt durch die Forderung ebener Schallwellen im Meßrohr fest. Sie hängt von der Art der Erregung ab und liegt nach RAYLEIGH bei $\lambda = 3{,}413 \cdot r$. Demgegenüber steht eine Abnahme der Meßgenauigkeit, die nach tiefen Frequenzen durch größere Unterschiede der Schalldruck-

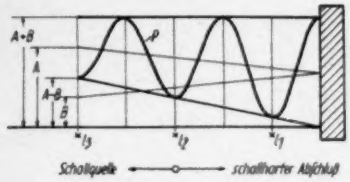


Abb. 2. Verlauf der stehenden Wellen in schallhart abgeschlossenem Meßrohr geringer Eigendämpfung

extremwerte, schärfere Minima und genauere Bestimmungsmöglichkeit von x_l zunimmt. Ein mittlerer Rohrdurchmesser von 5—10 cm wird am besten diesen gegenläufigen Forderungen gerecht.

Für verschiedene Strömungswiderstände R sind in Abb. 3 die Wellenverhältnisse d über der Frequenz aufgetragen. Die Größe des zugelassenen Meßfehlers bestimmt die Frequenzgebiete, in denen die Eigendämpfung des Meßrohres vernachlässigt werden darf. Für diesen Fall vereinfachen sich die Gleichungen 18, 19 und die Komponenten des Wandwiderstandes errechnen sich nach den in der Hochfrequenztechnik bei der Scheinwiderstandsmessung mit Lechersystemen bekannten Ausdrücken.

Der praktische Aufbau des Meßsystems erfolgt nach den gegebenen Richtlinien, seine Anordnung zeigt Abb. 4:

Rohr II, an dessen einem Ende die zu messende Materialprobe angebracht ist und Rohr IV, das durch eine Gummikupplung mit dem elektrodynamischen Schallgeber verbunden ist, sind fest montiert. Über beide läßt sich saugend Rohr III, das einen Ansatz zum Anbringen des Meßtelephons besitzt, verschieben und gestattet das Abtasten der stehenden Wellen im Rohr. Das einseitig schallhart abgeschlossene Rohr I dient zur Herstellung

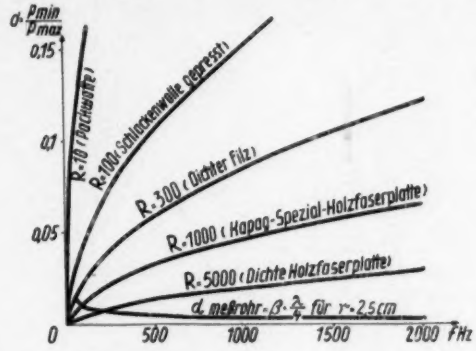


Abb. 3. Frequenzabhängigkeit des Wellenverhältnisses d für verschiedene Strömungswiderstände R bei der gleichen Porosität $P = 0{,}75$

von Leerlauf und Kurzschluß bei Materialproben endlicher Schichtstärke. Die beschriebene Rohranordnung hat den Vorteil, daß sich wegen der konstanten Länge des gesamten Systems während einer Messung die Versuchsbedingungen nicht ändern.

Die Bestimmung des Abschlußwiderstandes umfaßt die Messung der das Wellenverhältnis d bestimmenden Schalldruckextremwerte sowie der Entfernung x_l des ersten Schalldruckknotens von der Materialprobe.

Zweckmäßig benutzt man Stoffproben endlicher Schichtstärke, erhält bei schallhart abgeschlossener Rückseite den Leerlaufwiderstand $\mathfrak{W}_l$, bei einer Entfernung $\lambda/4$ des harten

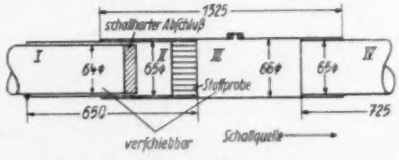


Abb. 4. Anordnung zum Messen der akustischen Eigenschaften poröser Schallschlucker

Abschlusses von der Rückseite den Kurzschlußwiderstand $\mathfrak{W}_k$. Der Eingangswiderstand des Materials für unbegrenzte Schichtstärke und das Übertragungsmaß γ ergeben sich aus

$$\mathfrak{W}_\infty = \sqrt{\mathfrak{W}_k \cdot \mathfrak{W}_l}, \tag{21}$$

$$\mathfrak{Tg}\,\gamma_l = \sqrt{\frac{\mathfrak{W}_\infty}{\mathfrak{W}_l}} \tag{22}$$

[6]) W. BÜRK und H. LICHTE, Akust. Z. 5 (1938), S. 259.

die Werte für Dämpfungs- und Phasenmaß

$$\beta l = \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathfrak{W}_l + \mathfrak{W}_\infty|}{|\mathfrak{W}_l - \mathfrak{W}_\infty|}, \tag{23}$$

$$\alpha l = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1). \tag{24}$$

In den Abb. 5, 6, 7 sind alle für verschiedene Schichtstärke von Packwatte durchgeführten Messungen aufgetragen.

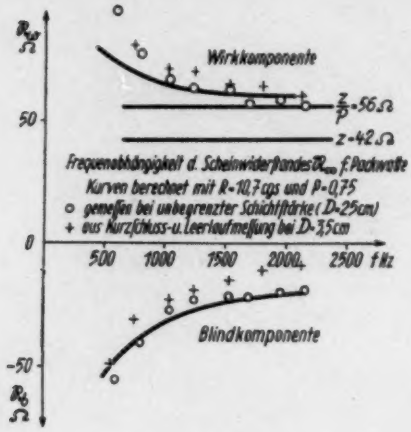


Abb. 5a.

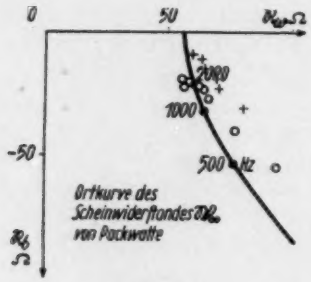


Abb. 5b

Abb. 5. Scheinwiderstand $\mathfrak{W}_\infty$ von Packwatte
a) Frequenzabhängigkeit von Wirk- und Blindkomponente;
b) Ortskurvendarstellung des Scheinwiderstandes

Die Materialkonstanten Strömungswiderstand R und Porosität P ergeben sich durch Auswertung der Gleichungen (8), (9). Für den Strömungswiderstand

$$R = \omega \varrho_m \cdot \sqrt{\left[\frac{\Re_m^2 + \Re_b^2}{\Re_w^2 - \Re_b^2}\right]^2 - 1} \tag{25}$$

ergab sich im Mittel $R = 10{,}7$ cgs. Eine Kontrolle durch eine Gleichluftmessung nach GEMANT[7]) ergab in guter Übereinstimmung $R = 12$ cgs, so daß also im Material keine Erhöhung der wirksamen Dichte auftritt, ϱ_m gleich ϱ_0 ist.

[7]) A. GEMANT, S.-B. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. 17 (1933).

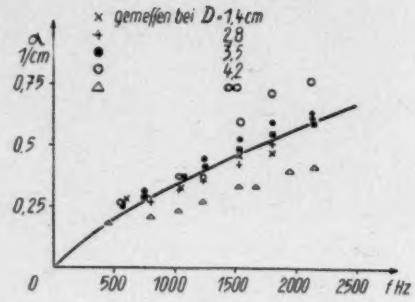


Abb. 6a

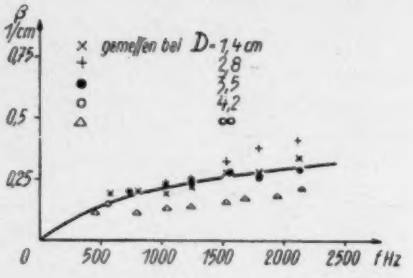


Abb. 6b

Abb. 6. Frequenzgang der Übertragungskonstanten von Packwatte
a) Phasenmaß; b) Dämpfungsmaß

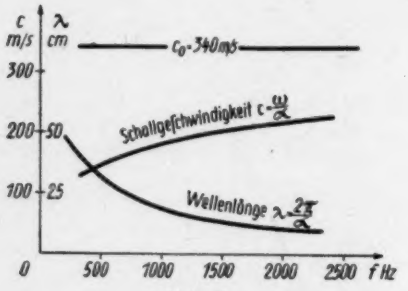


Abb 7a

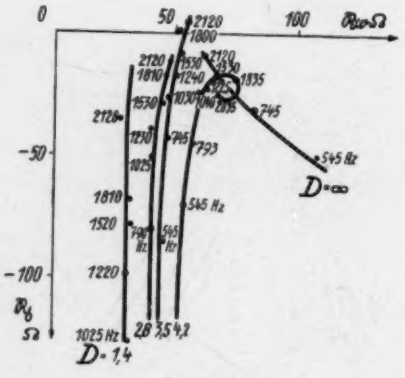


Abb. 7b

a) Frequenzgang von Schallgeschwindigkeit und Wellenlänge in Packwatte; b) In Abhängigkeit von der Frequenz gemessene Scheinwiderstände von Packwatte für verschiedene Schichtstärken D (s. Abb. 1)

Der Mittelwert der Porosität P, ebenfalls aus den Gleichungen (8), (9) bestimmt, war 75%, die durch Bestimmung der Wasserschluckfähigkeit und die durch Gewichts- und Volumenbestimmung gefundenen Werte ergaben im Mittel $P = 70\%$.

Die Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Werte für den Frequenzgang von Wandwiderstand, Dämpfungs- und Phasenmaß ist befriedigend, die Abweichungen von den theoretischen Werten und die Streuung der Meßpunkte finden ihre Erklärung in der ungleichen Struktur der Packwatteproben, die eine Herabsetzung der Meßgenauigkeit bedingt und Fehlerquellen schafft. Mit der beschriebenen Anordnung konnte das Wellenverhältnis im Mittel auf 3%, die Strecke x_l im Mittel auf 1% genau gemessen werden.

Abschließend kann festgestellt werden, daß die auf vereinfachenden Voraussetzungen beruhende Theorie das akustische Verhalten poröser Schallschlucker mit genügender Genauigkeit beschreibt.

3. Die Theorie von Rohren mit schallschluckender Wand[8)9)10)11)]

An einem zylindrischen Rohr, dessen schallschluckende Wände von einem schallharten Mantel umgeben sein sollen — Abb. 8 — werden die Vorgänge beim Schalldurchgang unter den

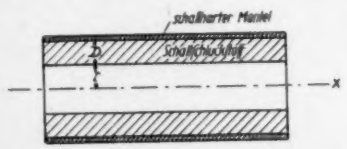


Abb. 8. Rohr mit schallschluckender Wandung

sehr vereinfachenden, aber die experimentellen Ergebnisse doch ziemlich gut wiedergebenden Annahmen betrachtet, daß

1. das Rohr unendlich lang ist,
2. der durchgehende Schall ebene Wellenfront hat,
3. die Schallfortpflanzung im Wandmaterial nur in senkrecht zur Rohrachse angeordneten Poren gleicher Größe erfolgt.

Die Grundgleichungen für die Schallfortpflanzung in der x-Richtung lauten dann

$$-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} = \varrho \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\,, \tag{26}$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{P} + \mathfrak{K} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}\,. \tag{27}$$

Die Wandreibung ist vernachlässigt, die Wirkung des Wandmaterials durch eine Ableitung $\mathfrak{G}$ gekennzeichnet. Die Lösung durch den Ansatz 2 ergibt

$$\mathfrak{P}_0 \cdot \gamma = j\,\omega\,\varrho \cdot \mathfrak{V}_0\,, \tag{28}$$

$$\mathfrak{V}_0 \cdot \gamma = (\mathfrak{G} + j\,\omega\,\mathfrak{K}) \cdot \mathfrak{P}_0\,. \tag{29}$$

Der Längswiderstand ist ein reiner Blindwiderstand $j\,\omega\,\varrho$, wobei ϱ den Wert der Luftdichte $\varrho = 0{,}0013$ hat, die Querableitung besteht aus der adiabatischen Federung der Luft $j\,\omega\,\mathfrak{K} = \frac{j\,\omega}{\varkappa \cdot p_0}$ und der komplexen Ableitung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_w + j\,\mathfrak{G}_b$, die das Wandmaterial darstellt. Letztere ist durch die Messung des Wandwiderstandes bei senkrechtem Schalleinfall gegeben und geht bei konstanter Wandstärke D im Verhältnis Kreisumfang zu Kreisfläche $= \frac{2}{r}$ ein. Die Komponenten der gesamten Ableitung sind also

$$G_w = \mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r} \qquad G_b = \mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} + \omega\,\mathfrak{K}\,. \tag{30}$$

Für Übertragungsmaß γ und Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta + j\,\alpha \\ &= \sqrt{j\,\omega\,\varrho\left[\mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r} + j\left(\mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} + \omega\,\mathfrak{K}\right)\right]}\,,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z} &= Z_w + j\,Z_b \\ &= \sqrt{\frac{j\,\omega\,\varrho}{\mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r} + j\left(\mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} + \omega\,\mathfrak{K}\right)}}\,.\end{aligned} \tag{32}$$

Aus (31) ergeben sich durch Trennung von Real- und Imaginärteil die Werte für Phasen-

---

8) L. J. Sivian, J. Acous. Soc. Am. 9 (1937), Nr. 2.
9) K. Schuster, Akust. Z. 5 (1939), S. 335.
10) J. P. Bosquet, Bull. Techn. Assoc. Ing. Bruxelles.
11) E. Waetzmann und W. Wente, Akust. Z. 4 (1939), Heft 1, S. 1.

und Dämpfungsmaß zu

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}\left(\mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} + \omega\mathfrak{R}\right)} \times \sqrt{\sqrt{1+\left[\frac{\mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r}}{\mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} + \omega\mathfrak{R}}\right]^2} + 1}\,, \tag{33}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}\left(\mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} + \omega\mathfrak{R}\right)} \times \sqrt{\sqrt{1+\left[\frac{\mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r}}{\mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} + \omega\mathfrak{R}}\right]^2} - 1}\,. \tag{34}$$

Die Richtigkeit dieser Ausdrücke wird durch Einsetzen der Grenzwerte kontrolliert:

1. wird für $r = \infty$ $\alpha = \omega\sqrt{\varrho \cdot \mathfrak{R}}$ und $\beta = 0$, d. h. wir bekommen eine ebene Schallwelle in Luft mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varrho\,\mathfrak{R}}}$,

2. ergeben sich dieselben Werte für den Grenzfall $\mathfrak{G} = 0$, wir haben eine ebene Welle in einem schallharten Rohr vor uns.

Durch Einführen des Betrages der Gesamtableitung $|G| = \sqrt{G_w^2 + G_b^2}$ vereinfachen sich die Ausdrücke für Dämpfungs- und Phasenmaß:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}(|G| + G_b)}\,, \tag{35}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}(|G| - G_b)}\,. \tag{36}$$

Für den Wellenwiderstand ergibt sich aus Gleichung (28)

$$\mathfrak{Z} = Z_w + jZ_b = \frac{\omega\varrho}{|\gamma|^2}\cdot\alpha + j\frac{\omega\varrho}{|\gamma|^2}\cdot\beta \tag{37}$$

und, da nach (35), (36) $\frac{\omega\varrho}{|\gamma|^2} = \frac{1}{|G|}$ sein muß, für Real- und Imaginärteil

$$Z_w = \frac{\alpha}{|G|} = \frac{1}{|G|}\cdot\sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}(|G| + G_b)}\,. \tag{38}$$

$$Z_b = \frac{\beta}{|G|} = \frac{1}{|G|}\cdot\sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}(|G| - G_b)}\,. \tag{39}$$

Die angeführten Lösungen sagen über das Verhalten gedämpfter Rohre bei Schalldurchgang in der Achsenrichtung aus, daß die Wellenamplitude exponentiell gemäß β gedämpft wird und die Schallgeschwindigkeit $v = \frac{\omega}{\alpha}$ kleinere Werte als in freier Luft annimmt. Der Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ wird gegenüber dem in freier Luft komplex und nimmt dessen Wert im Grenzfall $\omega = \infty$ an.

Maßgebend für die angeführten Größen sind der Rohrradius r, die Frequenz ω und die Ableitung $\mathfrak{G}$ des Wandmaterials. Diese ist komplex und geht durch Inversion aus dem Wandwiderstand hervor

$$\mathfrak{G}_w = \frac{\mathfrak{R}_w}{|\mathfrak{R}|^2} \qquad \mathfrak{G}_b = -\frac{\mathfrak{R}_b}{|\mathfrak{R}|^2} \tag{40}$$

und nimmt für unbegrenzte Schichtdicke des Materials nach den Gleichungen (8), (9) folgende Werte an:

$$\mathfrak{G}_w = \frac{P}{Z\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1}}{\sqrt{1+\eta^2}}\,, \tag{41}$$

$$\mathfrak{G}_b = \frac{P}{Z\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{1+\eta^2}-1}}{\sqrt{1+\eta^2}}\,, \tag{42}$$

als deren Ortskurve sich durch Erfüllung der Gleichung

$$[\mathfrak{G}_w^2 + \mathfrak{G}_b^2]^2 = \left(\frac{P}{Z}\right)^2\cdot(\mathfrak{G}_w^2 - \mathfrak{G}_b^2) \tag{43}$$

eine Lemniskate als Inversion einer Hyperbel ergeben muß.

Weiter sei der Frequenzgang und die Abhängigkeit vom Rohrradius für das Dämpfungs- und Phasenmaß β und α an einigen Grenzfällen diskutiert:

1. $\eta \gg 1$. Das Wandmaterial besitzt einen solchen Strömungswiderstand, daß bei den betrachteten Frequenzen $\mathfrak{G}_w = \mathfrak{G}_b$ und $\mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r} \ll \omega\mathfrak{R}$ sein muß. Dann vereinfachen sich die Ausdrücke (33), (34)

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}\cdot\omega\mathfrak{R}}\cdot\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\mathfrak{G}_w\cdot\frac{2}{r}}{\omega\mathfrak{R}}\right)^2} + 1}\,, \tag{44}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\varrho}{2}\cdot\omega\mathfrak{R}}\cdot\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\mathfrak{G}_w\cdot\frac{2}{r}}{\omega\mathfrak{R}}\right)^2} - 1}\,. \tag{45}$$

Da nach den gegebenen Voraussetzungen auch $\omega\mathfrak{R} \gg \mathfrak{G}_w\frac{2}{r}$ ist, kann weiter vereinfacht werden

$$\alpha = \sqrt{\omega^2\varrho\mathfrak{R}}\cdot\left[1 + \frac{\left(\frac{\mathfrak{G}_w\cdot\frac{2}{r}}{\omega\mathfrak{R}}\right)^2}{8}\right] \sim \omega\sqrt{\varrho\mathfrak{R}} = \frac{\omega}{c}\,, \tag{46}$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2\varrho\mathfrak{R}}\cdot\frac{\mathfrak{G}_w}{r\cdot\omega\mathfrak{R}} = \sqrt{\varrho/\mathfrak{R}}\cdot\frac{\mathfrak{G}_w}{r} = \frac{Z}{r}\cdot\mathfrak{G}_w\,. \tag{47}$$

Den Wert für $\mathfrak{G}_w$ als Materialbestimmungsgröße erhalten wir aus Gleichung (41), da $\eta \gg 1$ sein soll, zu $\mathfrak{G}_w = \frac{P}{Z\sqrt{\eta}}$. Durch Einsetzen und unter Benutzung der Beziehung $\eta = \frac{R}{\omega \varrho}$ erhalten wir

$$\beta = \frac{P}{r\sqrt{2\eta}} = \frac{\sqrt{\omega}}{r} \cdot P \cdot \sqrt{\frac{\varrho}{2R}}, \tag{48}$$

$$\alpha = \alpha_{Luft}. \tag{49}$$

Damit ist die Abhängigkeit des Verlaufes von α und β für die gestellten Bedingungen von den Parametern ω und r festgelegt, die Dämpfung verläuft als Funktion der Frequenz nach einer Parabel, als Funktion des Rohrradius nach einer Hyperbel. Phasenmaß und Schallgeschwindigkeit haben die gleichen Werte wie in freier Luft. Die Gleichung für die Rohrdämpfung läßt sich unter Einführung des Schluckgrades a, der bei $\eta \gg 1$ durch $a = 2P \cdot \sqrt{\frac{2}{\eta}}$ angenähert werden kann, in die Form

$$\beta = \frac{a}{4 \cdot r} \tag{50}$$

bringen. Das ist der gleiche Ausdruck, den K. Schuster[9]) durch Berechnung nach Sommerfelds Theorie über die Fortpflanzung elektrischer Wellen längs eines Drahtes, die unter Einführung entsprechender akustischer Größen den behandelten Problemen entspricht, findet.

2. $\eta \ll 1$. Der Strömungswiderstand sei so klein, daß $\omega \mathfrak{R} \gg \mathfrak{G}_b \cdot \frac{2}{r}$ und $\mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r} \gg \omega \mathfrak{R}$ werden und wieder die Gleichungen (44), (45) gelten. Wegen $\mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r} \gg \omega \mathfrak{R}$ erhalten sie gleiche Größe und nachstehende Werte

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \varrho}{2} \cdot \omega \mathfrak{R}} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{G}_w \cdot \frac{2}{r}}{\omega \mathfrak{R}}} = \sqrt{\frac{\omega}{r} \cdot \varrho \cdot \mathfrak{G}_w}. \tag{51}$$

Die Wirkableitung wird für die gegebenen Bedingungen nach (39) $\mathfrak{G}_w = \frac{P}{Z}$ und wir erhalten für Dämpfungs- und Phasenmaß:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega}{r}} \cdot \sqrt{\frac{\varrho \cdot P}{Z}} \tag{52}$$

übereinstimmend mit einer von L. J. Sivian gegebenen Ableitung[8]).

Die Abhängigkeit von der Frequenz ist die gleiche wie unter 1., während der Rohrradius hier nur mit $\sqrt{\frac{1}{r}}$ eingeht. Zur Veranschaulichung der behandelten Sonderfälle dienen die Abb. 9, 10, in denen die Frequenz- und Radiusabhängigkeit der Dämpfung im Vergleich zu experimentellen Daten dargestellt ist.

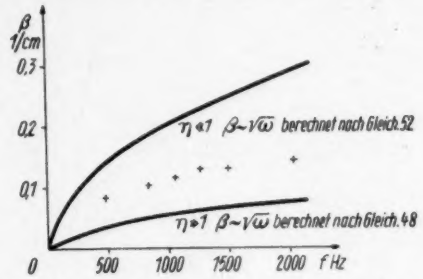


Abb. 9. Abhängigkeit der Rohrdämpfung β von der Frequenz

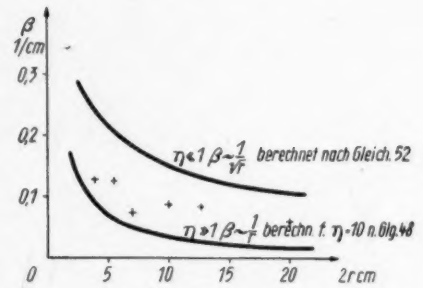


Abb. 10. Abhängigkeit der Rohrdämpfung β vom Rohrradius

3. $\eta \ll 1$ kann auch bei großen Strömungswiderständen R theoretisch durch entsprechend sehr hohe Frequenzen erfüllt werden, so daß $\omega \mathfrak{R} \gg \mathfrak{G}_b$ und $\omega \mathfrak{R} \gg \mathfrak{G}_w$ sein können. Als Ergebnis erhalten wir für diesen Fall durch Einsetzen von $\mathfrak{G}_w = \frac{P}{Z}$ in die Näherungsgleichung (47)

$$\beta = \frac{P}{r}. \tag{53}$$

Diese Gleichung stellt für $P = 1$ den theoretisch erreichbaren Höchstwert der Dämpfung β in einem durch poröse Schallschluckstoffe unbegrenzter Schichtstärke gedämpften Rohr, dessen Radius sie umgekehrt proportional ist, dar:

$$\beta = \frac{1}{r}. \tag{54}$$

Eine Kontrolle dieses Ergebnisses läßt sich

durch eine Betrachtung der Schalleistungsverhältnisse im Rohr durchführen. Aus Abb. 11 sind die notwendigen Bestimmungsgrößen zu ersehen. Die mittlere auf der Länge L seitlich in das Material eindringende Schalleistung N berechnet sich wie folgt aus den Schalldruckverhältnissen

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-\beta L}; \quad P^2_{mittel} = \frac{1}{L} \int_0^L P_0^2 \cdot e^{-2\beta L} dL$$
$$= \frac{P_0^2 - P_1^2}{2\beta L}; \quad N_m = \frac{P_m^2}{\mathfrak{W}},$$

wenn $\mathfrak{W}$ den Gesamtwiderstand der Wandflächen darstellt. Ist $\mathfrak{Z}$ der in der Fortpflanzungsrichtung über dem Querschnitt auftretende Widerstand, so muß folgende Gleichung gelten:

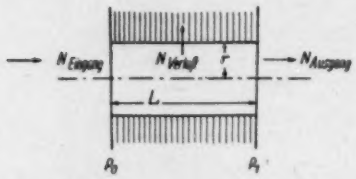


Abb. 11. Leistungsverhältnisse im Rohr mit schallschluckender Wand

$$(55) \quad r^2\pi \cdot \frac{P_0^2}{\mathfrak{Z}} = r^2\pi \cdot \frac{P_1^2}{\mathfrak{Z}} + 2r\pi \cdot L \cdot \frac{P_0^2 - P_1^2}{2\beta L \cdot \mathfrak{W}}$$
$$N_{Eingang} = N_{Ausgang} + N_{Verlust},$$

aus der für die Dämpfung β im Idealfall $\mathfrak{Z} = \mathfrak{W}$ das obige Ergebnis $\beta = \frac{1}{r}$ hervorgeht. Dieser Wert entspricht der Schalldruckabnahme einer Kugelwelle im Abstand des Radius r von der Erregungsstelle.

Praktisch wichtig sind die sich aus der Betrachtung der Grenzfälle 1 und 2 ergebenden Folgerungen: Die akustischen Eigenschaften des Wandmaterials und die des Rohrinneren sind stets entgegengesetzt. Große Dämpfung und damit verringerte Schallgeschwindigkeit im Wandmaterial unbegrenzter Schichtstärke geben geringe Dämpfung und eine dem Wert in freier Luft naheliegende Schallgeschwindigkeit in der Rohrachsenrichtung, kleine Dämpfung und Luftschallgeschwindigkeit im Wandmaterial geben große Dämpfung und Herabsetzung der Schallgeschwindigkeit im Rohr. Diese Tatsache erklärt sich zwanglos aus dem Verhalten des Wandwiderstandes, der bei großer Materialdämpfung groß ist, bei kleiner Dämpfung kleine Werte annimmt, so daß für die Herstellung großer Dämpfung in der Rohrachse Stoffe mit kleinen Strömungswiderständen am besten geeignet sind. Bei ihnen läßt sich eine praktisch unbegrenzte Schichtstärke, besonders bei tiefen Frequenzen, im allgemeinen schwer herstellen.

Wir müssen unsere Betrachtungen auf Rohre mit schallschluckender Wand endlicher Dicke erweitern. Der Übergang von unendlicher zu endlicher Schichtstärke sei willkürlich durch eine Grenzschichtstärke D_{gr} gekennzeichnet, bei der, senkrechten Schalleinfall vorausgesetzt, am Materialeingang eine e^{π}-fach gedämpfte reflektierte Welle auftritt (Abb. 12). Dann wird $D_{gr} = \frac{\pi}{2\beta}$ und für

4. $\beta_m l > \frac{\pi}{2}$ bleiben die für unbegrenzte Schichtstärken abgeleiteten Beziehungen bestehen. β_m bedeutet die Dämpfung im Wandmaterial. Für den Fall

5. $\beta_m l \ll \frac{\pi}{2}$, der für $\eta \ll 1$ (Fall 2) erfüllt ist, werden zweckmäßig die Schichtstärken $D = \lambda/4$ und $D = \lambda/2$ betrachtet,

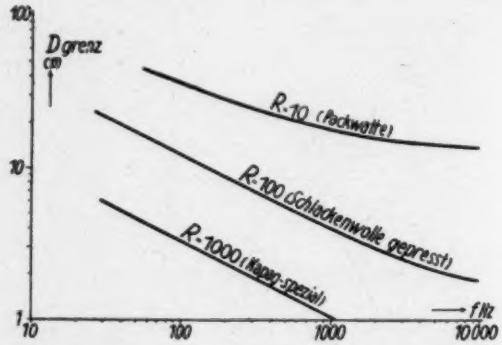


Abb. 12. Frequenzabhängigkeit der Grenzschichtstärke D_{grenz} für verschiedene Strömungswiderstände R

für die die reelle Komponente des Leitwertes vereinfacht lautet:

$$(56) \quad \mathfrak{G}_{w\,D=\lambda/4} = \frac{P}{Z\beta l} \quad \mathfrak{G}_{w\,D=\lambda/2} = \frac{P}{Z}\beta l.$$

Für das Dämpfungsmaß β_R in der Achsenrichtung folgt dann:

$$(57) \quad \beta_{R\,D=\lambda/4} = \sqrt{\frac{\omega}{r}} \cdot \sqrt{\frac{\varrho \cdot P}{Z \cdot \beta_m \cdot \frac{\lambda}{4}}}$$
$$\beta_{R\,D=\lambda/2} = \sqrt{\frac{\omega}{r}} \cdot \sqrt{\frac{\varrho \cdot P}{Z} \cdot \beta_m \cdot \frac{\lambda}{2}}.$$

Die Ergebnisse lassen Abweichungen von den für die unendlich dicke Wand gewonnenen Werten erkennen, die bei Erweiterung der Betrachtung auf die Schichtstärken $D = \frac{\lambda}{4} \cdot k$ $(k = 1, 3, 5, \ldots)$ und $D = \frac{\lambda}{2} \cdot n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ periodisch erscheinen, wobei mit wachsenden k und n die Unterschiede kleiner werden müssen. Die Maxima der Abweichungen liegen angenähert bei $D = k \cdot \frac{\lambda}{4}$, die Minima bei $D = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ (Abb. 13 und 14).

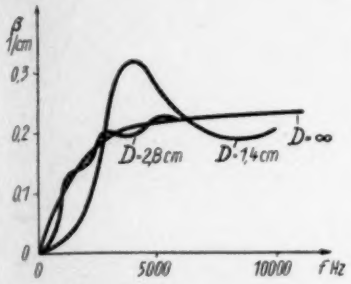


Abb. 13. Berechneter Dämpfungsverlauf für Packwatterohre vom Radius $r = 3{,}2$ cm und verschiedenen Wandstärken D

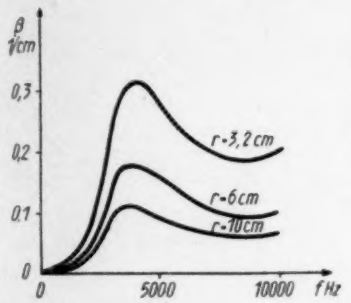


Abb. 14. Berechneter Dämpfungsverlauf für Packwatterohre der Wandstärke $D = 1{,}4$ mm und verschiedene Radien r

4. Messungen an Rohren mit schalldämpfender Wand

Den Aufbau der Meßanordnung zeigen die Abb. 15 und 16. Die Tonfrequenz wurde nach Siebung und Verstärkung einem akustisch gut abgeschirmten dynamischen Lautsprecher zugeführt, von dem der Schall durch ein Messingrohr dem aus porösem Schluckstoff gebildeten Rohr gleichen Durchmessers zugeleitet wurde. Der Vorteil der Anordnung liegt darin, daß

1. eine Beeinflussung des Meßmikrophons durch direkten Schall wegfällt,
2. die Schallwellen im Messingrohr bis zur RAYLEIGHschen Grenzbedingung ebene Wellenfront besitzen,
3. durch Ausmessen der im Messingrohr auftretenden stehenden Wellen Bestimmungen der Wellenlänge und des Eingangswiderstandes durchgeführt werden können.

Eine über Länge und Querschnitt verschiebbare Meßsonde von 1 cm Durchmesser, die durch einen Gummischlauch mit einem GERLACH-Kondensatormikrophon in Verbindung stand, gestattete die Aufnahme des Schalldrucks $\mathfrak{P}$ an jeder Stelle der Rohranordnung. Die Anordnung war im Bereich 200—5000 Hz relativ geeicht, die Meßempfindlichkeit konnte durch Längenänderung der Meßsonde beeinflußt werden, Lageänderungen des Gummischlauches beim Verschieben der Sonde waren ohne Einfluß.

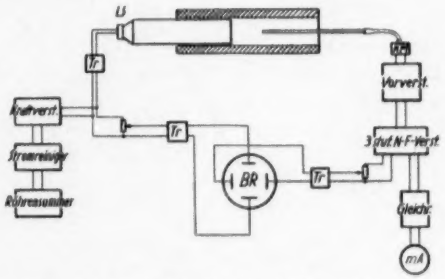


Abb. 15. Schaltbild der Meßanordnung

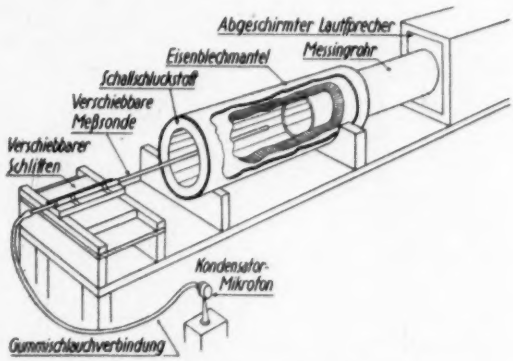


Abb. 16. Akustischer Teil der Meßanordnung

Zur relativen Phasenbestimmung wurde die Tonfrequenz einmal vom Röhrensummer, einmal vom Empfangskreis auf je ein Plattenpaar einer BRAUNschen Röhre gegeben. Die entstehende LISSAJOUSfigur gab ein Bild der Phase des Schalldrucks an der Meßstelle für einen beliebigen Bezugspunkt. Die schalldämpfenden Rohre wurden so hergestellt, daß der Schallschluckstoff (Packwatte) über ein weitmaschiges Drahtgeflechtrohr des gewünschten Durchmessers aufgebracht wurde. Als schallharter Außenmantel diente ein übergeschobenes Blechrohr. Die Längen L der schalldämpfenden Rohre betrugen 1 und 2 m. Der Meßbereich wurde stets so gewählt, daß er unbeeinflußt von der Rückwirkung des freien Rohrendes auf die fortschreitenden Wellen blieb, die Bedingung eines unendlich langen Rohres

erfüllt war. Gemessen wurde weiter nur in dem Bereich, in dem konstanter Schalldruck und konstante Phase über dem Querschnitt auftraten, um der Bedingung ebener Wellen zu genügen, die in der Nähe des Überganges von Messing- zu Schluckrohr nicht erfüllt war. Solange ebene Wellen zugeführt wurden, waren die Wellen im schallschluckenden Rohr ebenfalls eben, eine Druckabnahme nach dem Rande zu konnte nicht festgestellt werden. Zur Bestimmung des Dämpfungsmaßes β wurde der Schalldruckverlauf in der Achsenrichtung des Rohres gemessen. Er nahm in allen Fällen sehr genau nach einer e-Funktion ab, aus deren Exponenten nach

$$\beta = \frac{1}{l} \cdot \ln \frac{P_0}{P_1} \text{ Neper/cm} \tag{58}$$

das Dämpfungsmaß bestimmt wurde.

Das Phasenmaß α wurde mittels eines BRAUNschen Rohres bestimmt. Als Anfangspunkt der Messung wurde eine Stelle gewählt, an der als LISSAJOUSfigur ein Strich erschien, die Plattenspannungen also gleich- oder gegenphasig waren. Dann konnte sehr genau die Entfernung zwischen den Punkten, die zum Bezugspunkt $n \cdot 180$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$) Grad verschoben waren, bestimmt werden. Die Entfernung zweier gleichphasiger Stellen entspricht einer Wellenlänge λ und ergibt das Phasenmaß α und, da die Frequenz bekannt ist, die Schallgeschwindigkeit c aus

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad c = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{\alpha}. \tag{59}$$

Der Eingangswiderstand der schalldämpfenden Rohre konnte durch Ausmessen der stehenden Wellen im Messingrohr ganz entsprechend den früher angegebenen Wandwiderstandsmessungen bestimmt werden.

In den folgenden Diagrammen sind einige der durchgeführten Messungen dargestellt:

1. Für ein Rohr von 3,2 cm Radius und einer $D = 11$ cm starken Wand aus Packwatte, die im untersuchten Frequenzbereich unendlich dick wirkte, sind in Abb. 17 Phasenmaß α und Schallgeschwindigkeit c, in Abb. 18 das hauptsächlich interessierende Dämpfungsmaß β über der Frequenz dargestellt. α und c zeigen befriedigende Übereinstimmung mit den berechneten Kurven, als deren Berechnungsgrundlagen die an Packwatte durchgeführten Scheinwiderstandsmessungen dienten. Kleinere Abweichungen müssen wegen Inhomogenität der Packwatte, der Schwierigkeit, bei der Herstellung der Rohrwände gleiche Verhältnisse wie bei der Scheinwiderstandsmessung zu schaffen usw. in Kauf genommen werden. Größere Abweichungen von der Theorie, auf die noch näher eingegangen wird, zeigt der Frequenzgang der Dämpfung β. Die Werte weichen bei tiefen Frequenzen stark voneinander ab, nähern sich mit wachsender Frequenz und fallen bei etwa 2000 Hz zusammen. Annähernd die gleichen Verhältnisse zeigt das Dämpfungsmaß β bei einem Rohr gleicher Wandstärke vom Radius $r = 6$ cm (Abb. 19) und einem Rohr vom Radius $r = 3{,}2$ cm und einer Wandstärke $D = 1{,}4$ cm (Abb. 20). Für das letztere sind der Verlauf von Phasenmaß und Schallgeschwindigkeit in Abb. 21 dargestellt. Verlauf und Übereinstimmung mit der Theorie entsprechen dabei dem oben angeführten Beispiel eines Rohres vom Radius $r = 3{,}2$ cm und unendlicher Schichtstärke. Für das genannte Rohr der Wandstärke $D = 1{,}4$ cm ist in Abb. 22 der Frequenzgang der Dämp-

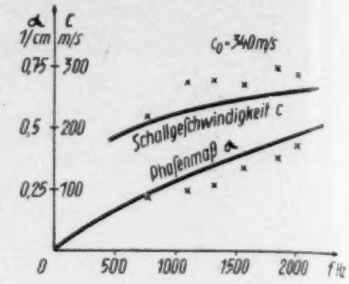
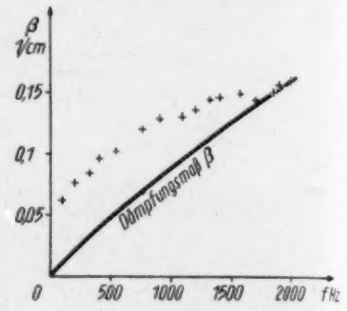


Abb. 17 und 18. Packwatterohr Wandstärke $D = 11$ cm; Radius $r = 3{,}2$ cm. Berechnete Frequenzgänge von Phasenmaß, Schallgeschwindigkeit und Dämpfungsmaß. Eingezeichnete Punkte gemessen



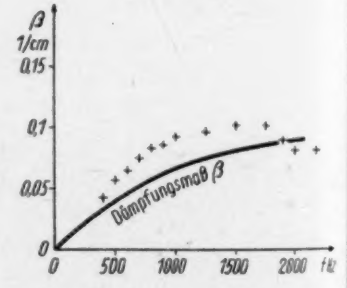
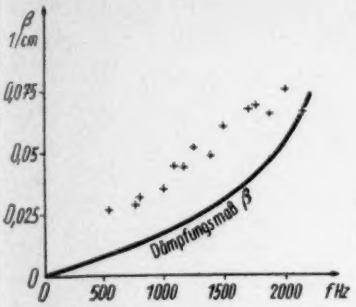


Abb. 19. Packwatterohr Wandstärke $D = 11$ cm; Radius $r = 6$ cm. Berechneter Frequenzgang des Dämpfungsmaßes. Eingezeichnete Punkte gemessen

fung β
dargestel
messene
als die b
Frequenz
β 1/cm
0,075
0,05
0,025
0
0
α 1/cm
c m/s
0,75 300
0,5 200
0,25 100
0
0
4000 Hz
mum au
LEIGHSC
3000 H
sichtlich
schnitt
ausgepr
mäßige
β 1/cm
0,3
0,2
0,1
0
0
gemeine
Rande
der Wa
fall des
Richtwi

fung β über den ganzen Tonfrequenzbereich dargestellt. War, wie gezeigt wurde, die gemessene Dämpfung bis etwa 2000 Hz größer als die berechnete, so liegt sie oberhalb dieser Frequenz wesentlich niedriger und weist bei



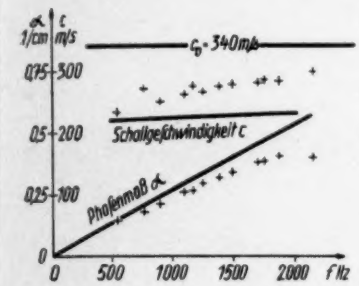


Abb. 20 und 21 Packwatterohr Wandstärke $D = 1{,}4$ cm; Radius $r = 3{,}2$ cm. Berechneter Frequenzgang von Dämpfungsmaß, Phasenmaß und Schallgeschwindigkeit. Eingezeichnete Punkte gemessen

4000 Hz ein nur schwach ausgeprägtes Maximum auf. Die Verhältnisse oberhalb der RAYLEIGHschen Grenzfrequenz, die für diesen Fall 3000 Hz beträgt, gestalten sich sehr unübersichtlich. Der Schalldruck über dem Rohrquerschnitt bleibt nicht konstant und durch schwach ausgeprägte Querresonanzen treten unregelmäßige Schalldruckverteilungen auf. Im all-

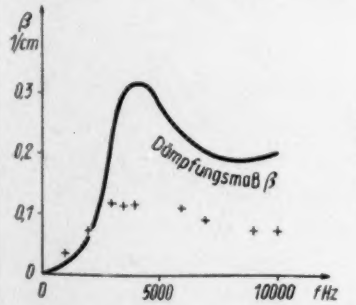


Abb. 22. Packwatterohr Wandstärke $D = 1{,}4$ cm; Radius $r = 3{,}2$ cm. Über den Tonfrequenzbereich berechneter Dämpfungsverlauf. Eingezeichnete Punkte gemessen

gemeinen nimmt der Schalldruck nach dem Rande zu ab, wodurch die dämpfende Wirkung der Wandbekleidung geringer wird. Im Grenzfall des Ultraschalls tritt wegen der scharfen Richtwirkung der Schallwellen überhaupt keine Dämpfung im Schluckrohr auf. Es muß also auch bei Schluckrohren mit praktisch unendlicher Wandstärke ein Maximum der Dämpfung auftreten, das vom Rohrradius und der Art der Schallanregung beeinflußt wird. Bei einem Rohr mit Radius $r = 5$ cm und Schlackenwollewandung wurde dieses Maximum bei $f \sim 5000$ Hz experimentell festgestellt.

5. Wellenfront an einer schallschluckenden Begrenzung[9)12)13)14)]

Zur Klärung der Frage, inwieweit die früher gestellte Forderung, daß die verschluckte Schallenergie senkrecht zur Rohrachse in das dämpfende Wandmaterial einläuft, berechtigt ist, stellen wir die folgende Betrachtung an. Eine ebene Schallwelle laufe in Luft mit der Schallgeschwindigkeit $v_1 = \frac{\omega}{\alpha_1}$ an einer Grenzschicht entlang. Das Begrenzungsmaterial soll keine Dämpfung, sondern nur eine andere Schallgeschwindigkeit $v_2 = \frac{\omega}{\alpha_2}$ besitzen. In das Material läuft dann seitlich eine Welle ein, deren Wellenfront mit der Begrenzung den Winkel $\sin \varphi = v_2/v_1$ einschließt (Abb. 23a).

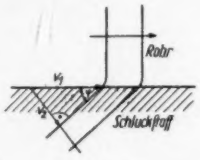


Abb. 23a.

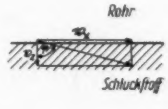


Abb. 23b.

Abb. 23. Winkel zwischen Wellenfront und Begrenzung a) $\eta \ll 1$ b) $\eta \gg 1$

In Randnähe ergeben sich kubische Parabeln als Übergang in die Front der in Luft fortschreitenden Welle. Nehmen wir als Begrenzungsmaterial einen porösen Schallschluckstoff unendlicher Schichtstärke, so gilt diese Betrachtung nur für den Fall $\eta \ll 1$, für den der Winkel durch $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{2}{\eta}}$ ausgedrückt werden kann, wenn $P = 1$ und $\varrho_m = \varrho$ vorausgesetzt werden.

[12)] G. v. BÉKÉSY, Z. techn. Phys. 1 (1933).

[13)] G. JOOS und J. TELTOW, Phys. Z. 40 (1939).

[14)] W. JANOVSKY und F. SPANDÖCK, Akust. Z. 2 (1937), Heft 6, S. 322.

Der andere Grenzfall $\eta \gg 1$ — gekennzeichnet durch einen Schallschluckstoff hoher Dämpfung β und großen Eingangswiderstandes — wird durch die Betrachtung der Schallschnelle $\mathfrak{v}$ in x- und z-Richtung erfaßt (Abb. 23b). Da Real- und Imaginärteil des Widerstandes $\mathfrak{W}$ in der z-Richtung gleich sind, ergibt sich für den Winkel $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{v}_x}{\mathfrak{v}_z} = \sqrt{2\eta}$. Eine allgemeingültige Berechnung gibt K. SCHUSTER[9]) an, dessen Beziehung $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{2}{\eta}} \cdot \frac{\eta^2+1}{\eta+1}$ die beschriebenen Grenzfälle enthält. Aus Abb. 24 geht hervor, daß die für die Grenzfälle aufgestellten Beziehungen bis zum Minimum des Winkels φ bei $\eta = 1$ näherungsweise verwendet werden können.

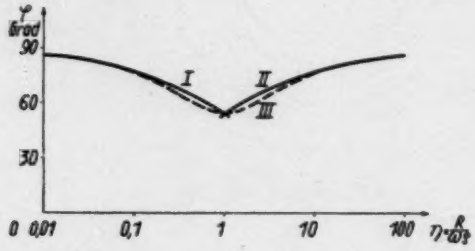


Abb. 24. Winkel zwischen Wellenfront und schallschluckender Begrenzung in Abhängigkeit des Parameters η

Die Schallwelle läuft also nicht senkrecht zur Oberfläche in das Begrenzungsmaterial ein, sondern unter einem Winkel, dessen Größe durch Frequenz und Strömungswiderstand des Schluckstoffes festgelegt ist.

Entsprechend verhalten sich die in Rohren mit schallschluckender Wand fortschreitenden ebenen Wellen, wobei beachtet werden muß, daß mit kleiner werdendem Rohrdurchmesser Wellenwiderstand und Schallgeschwindigkeit im Rohr immer mehr von den in freier Luft geltenden Werten abweichen.

Wegen der Abhängigkeit des Schluckgrades a der Rohrwand vom Einfallswinkel der Schallwellen, die durch eine mehr oder weniger gute Anpassung des Wandwiderstandes an den Luftwiderstand bedingt ist, muß die Dämpfung β der im Rohr fortschreitenden Welle andere Werte annehmen als die unter Zugrundelegung einer senkrecht zur Begrenzung ablaufenden Welle berechneten.

Übereinstimmend mit den Meßergebnissen bedingt der Frequenzgang des Winkels φ, den Wellenfront und Begrenzung am Rande einschließen, daß die Meßwerte nach tiefen Frequenzen größer, nach hohen Frequenzen kleiner sind als die berechneten. Nach sehr tiefen Frequenzen — $\eta \gg 1$ — nähern sich berechnete und gemessene Werte wieder und laufen dann zusammen, wenn der Schluckgrad a der Wandung gleich dem Schluckgrad a_0 bei senkrechtem Einfall wird. Dieser Fall ist nach K. SCHUSTER für $\eta \gg 1$ erfüllt[9]) s. Gleichung (50). Der Winkel, den Wellenfront und Rohrwand bilden, ist dann nach Gleichung (11) durch $\operatorname{tg}\varphi = \eta$ gegeben.

Zur Berechnung des Winkels φ aus den Meßwerten können für die Grenzfälle unter Einführung des Schluckgrades a die Beziehungen aufgestellt werden

$$(60)\quad \eta \gg 1 \quad a = \frac{a_0}{\cos\varphi} \qquad \cos\varphi = \frac{\beta_{berechnet}}{\beta_{gemessen}},$$

$$(61)\quad \eta \ll 1 \quad a = a_0 \cdot 4\cos\varphi \quad \cos\varphi = \left[\frac{\beta_{gemessen}}{2 \cdot \beta_{berechnet}}\right]^2,$$

wobei a_0 den Schluckgrad bei senkrechtem Schalleinfall bedeutet.

In Abb. 25 sind für einige Beispiele die so berechneten Winkel φ aufgetragen. Da die obigen Grenzfälle nur schlecht erfüllt sind, gelten die angegebenen Werte näherungsweise, genügen aber zur Darstellung des Verlaufs, der dem erwarteten entspricht, durchaus.

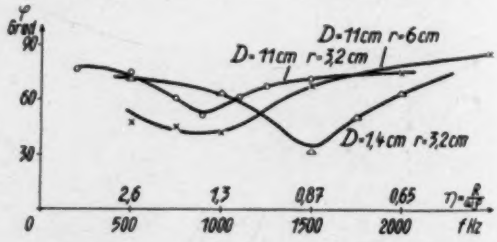


Abb. 25. Aus Meßwerten berechneter Verlauf des Winkels zwischen Wellenfront und Begrenzung

Die Tatsache, daß die Schallwelle unter einem flachen Winkel in das Wandmaterial einläuft, erklärt auch, daß das bei endlicher Wandstärke bei $D \sim \frac{\lambda}{4}$ auftretende Maximum der Dämp-

fung wesentlich flacher und niedriger gemessen wurde, als nach der Rechnung zu erwarten war. Die am schallharten Außenmantel reflektierte und in das Rohrinnere zurückkehrende Welle muß einen größeren Weg zurücklegen, auf dem sie stärker gedämpft wird als bei zur Rohrwand senkrechtem Schalleinfall. Ein Beispiel für das Auftreten der Maximalstellen wird in Abb. 26 für Glaswatterohre verschiedener Wandstärke gezeigt.

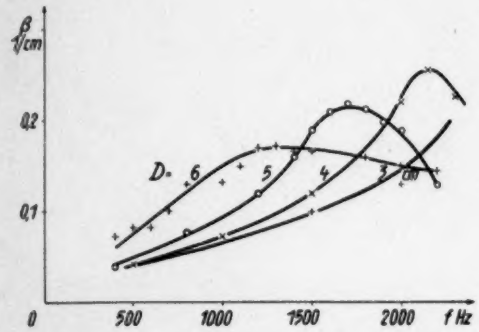


Abb. 26. Gemessene Frequenzgänge von Glaswatteröhren der Wandstärken $D = 3$, 4, 5, 6 cm und vom Radius $r = 3{,}5$ vm

6. Wellen- und Eingangswiderstand schalldämpfender Rohre

Der Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ eines schalldämpfenden Rohres ist wie das Übertragungsmaß γ von den akustischen Eigenschaften des Wandmaterials und vom Rohrradius abhängig. Nach dem Ersatzschaltbild der akustischen Rohrleitung (Abb. 27) muß $\mathfrak{Z}$ — im Gegensatz zum

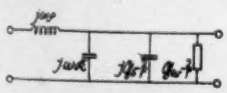


Abb. 27. Ersatzschaltbild von Rohren mit schallschluckender Wand

Wellenwiderstand poröser Schluckstoffe — induktiv sein, da das Längsglied ein reiner Blindwiderstand, das Querglied aber eine komplexe Ableitung ist. Im Grenzfall $\omega \to \infty$ kann der durch das Wandmaterial gegebene Anteil der Querableitung gegen die durch die Lufteigenschaften bestimmte Größe $\omega \mathfrak{K}$ vernachlässigt werden und $\mathfrak{Z}$ nimmt den Wert des Luftwiderstandes $Z = \sqrt{\varrho/\mathfrak{K}}$ an. Für $\omega \to 0$ geht $\mathfrak{Z}$ nach null. In Abb. 28 ist die berechnete Ortskurve des Wellenwiderstandes im Vergleich zu den aus den Meßwerten für α und β berechneten Werten dargestellt. Die Übereinstimmung ist gut, die Abweichungen erklären sich aus dem beschriebenen Eindringen der Welle unter einem Winkel in die Rohrwandung. Ein Versuch, den Wellenwiderstand durch eine Messung des Eingangsscheinwiderstandes zu gewinnen, führte auf abweichende Ergebnisse. Zur Klärung der Abweichungen wurde zunächst der Scheinwiderstand bestimmt, der am Übergang des Messingrohres in freie Luft auftritt. Nach Abb. 29 stimmt er gut mit dem Scheinwider-

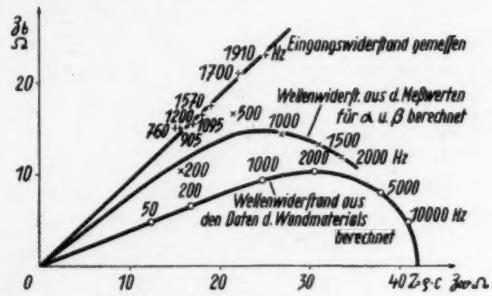


Abb. 28. Packwatterohr Wandstärke $D = 11$ cm, Radius $r = 3{,}2$ cm. Eingangs- und Wellenwiderstand

stand einer in unendlich ausgedehnter Wand schwingenden Kolbenmembran überein; das freie Rohrende ist also nur für $\frac{2\pi \cdot r}{\lambda} \ll 1$ ein reiner Kugelstrahler. Wird nun als Abschluß

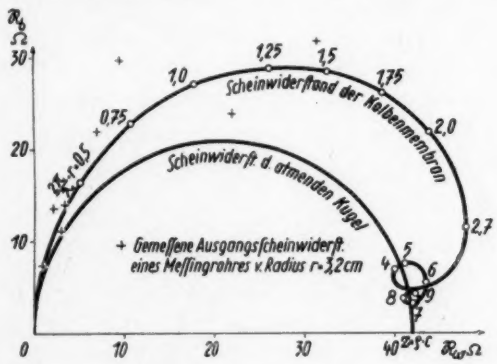


Abb. 29. Ausgangsscheinwiderstand eines Messingrohres vom Radius $r = 3{,}2$ cm

des Messingrohres ein schalldämpfendes Rohr gleichen Innendurchmessers benutzt, so bekommt das Schallfeld das in Abb. 30 dargestellte Aussehen: An der Übergangsstelle krümmen sich die ankommenden ebenen Wellenfronten und werden beim weiteren Fortschreiten durch den Einfluß der Rohrwand wieder eingeebnet.

Der Einfluß der Stoßstelle ist von Frequenz, Wandmaterial und Rohrradius abhängig. Der Schalldruck ist dabei in der Rohrachse größer als am Rande, die Schalldruckabnahme geht in Richtung der Rohrachse angenähert mit $1/L$, wenn L die Entfernung von der Stoßstelle bedeutet. Für ein Packwatterohr mit Radius

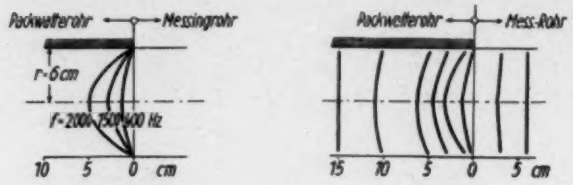


Abb. 30a. Abb. 30b.

Abb. 30. Verlauf der Linien gleichen Schalldrucks an der Übergangsstelle zwischen Messingrohr ($r = 6$ cm) und Packwatterohr ($r = 6$ cm; $D = 11$ cm)

a) an der Stoßstelle für verschiedene Frequenzen;
b) für verschiedene Entfernungen von der Stoßstelle bei $f = 1000$ Hz

$r = 3{,}2$ cm war die Störung bis $L = 8$ cm bei 400 Hz und $L = 12$ cm bei 2000 Hz bemerkbar. Erst von da ab war die Schalldruckabnahme durch das Dämpfungsmaß β des Schluckrohres bestimmt.

Für den Unterschied zwischen Wellen- und Eingangswiderstand folgt dann: Für sehr tiefe Frequenzen sind beide Größen wenig voneinander verschieden, nach höheren Frequenzen

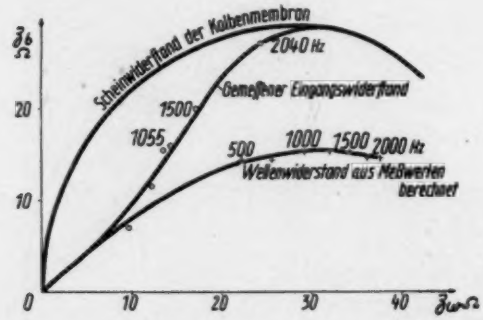


Abb. 31. Gemessener Eingangsscheinwiderstand eines Glaswatterohres der Wandstärke $D = 12$ cm und dem Radius $r = 3{,}5$ cm

nähert sich der Eingangswiderstand dem Scheinwiderstand der Kolbenmembran, während der Wellenwiderstand den erwarteten Verlauf nimmt. Ein experimentell gewonnenes Beispiel zeigt Abb. 31.

7. Richtlinien zur Anwendung von Schluckrohren[15])

Um beim praktischen Gebrauch von Schluckrohren hohe Dämpfung zu erzielen, wählt man den inneren Rohrradius so klein und die Rohrlänge so groß wie möglich. Als Wandbekleidung eignen sich am besten Stoffe mit niedrigem Strömungswiderstand R und großer Porosität P, wenn genügend Platz zur Unterbringung einer auch für die tiefste Übertragungsfrequenz praktisch unendlich dicken Schicht vorhanden ist. Wegen des Einlaufens der Schallwelle unter einem Winkel genügt eine kleinere Schichtstärke als nach der Definition der Grenzschichtstärke nötig wäre. Watte, Packwatte, Schlackenwolle und weicher Filz sind unter den gegebenen Umständen am günstigsten, ihre Strömungswiderstände liegen zwischen 5 und 50 cgs, die Porositäten zwischen 0,75 und 0,95. Ist man gezwungen, mit kleineren Wandstärken zu arbeiten, so muß es je nach der Frequenz des Störschalls einen optimalen Strömungswiderstand geben, denn bei schallhartem Außenmantel würde bei $R = \infty$ und $R = 0$ die Dämpfung in der Rohrachse $\beta = 0$ sein. Hier kommen Stoffe mit Strömungswiderständen zwischen 100 und 1000 cgs, wie sie dichte Filze und für akustische Zwecke besonders weich hergestellte Faserstoffe besitzen, in Frage. Um das Absinken der Dämpfung bei hohen Frequenzen zu verhindern, legt man in den Gang des Rohres Bögen und Windungen ein.

Ist das Schluckrohr so kurz, daß die am Ausgang, dessen Scheinwiderstand durch den der Kolbenmembran angenähert wird, reflektierte Welle auf den Eingang merkbar zurückwirkt, so treten periodische Schwankungen des Verhältnisses $p_{eingang}/p_{ausgang}$ bis $\beta L \leq 1{,}5\,N$ auf, wenn die bei den Schluckstoffen definierte Grenzschichtstärke auf das Rohr übernommen wird. Abb. 32 zeigt das an einem Packwatterohr der Schichtstärke $L = 1{,}4$ cm und Radius $r = 3{,}2$ cm gemessene Verhältnis p_e/p_a im Vergleich mit dem aus dem gemessenen Dämp-

[15]) G. Buchmann und L. Keidel, Akust. Z. 4 (1939), Heft 1, S. 29.

fungsmaß β des unendlich langen Rohres berechneten Druckverhältnisses. Die nach höheren Frequenzen größer werdenden Abweichungen sind der Wirkung der Stoßstelle zwischen Messing- und Schluckrohr zuzuschreiben.

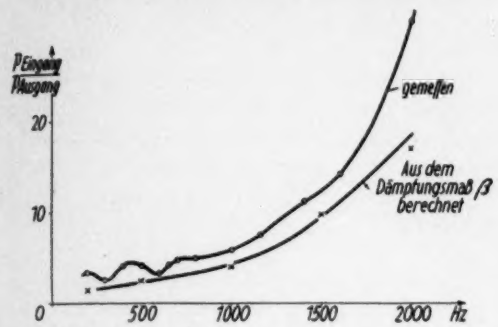


Abb. 32. Frequenzgang der Dämpfung für ein Packwatterohr der Länge $L = 40$ cm, der Wandstärke $D = 1{,}4$ cm und dem Radius $r = 3{,}2$ cm

Zusammenfassung

1. Das Verhalten poröser Schallschluckstoffe bei senkrechtem Schalleinfall wird in einer Rohranordnung experimentell untersucht, die Gültigkeit der bestehenden Theorie bestätigt.
2. Es werden Gleichungen abgeleitet, die die Schallverhältnisse in Rohren mit schallschluckender Wandung unter den vereinfachenden Voraussetzungen beschreiben, daß eine Welle senkrecht zur Oberfläche in das Wandmaterial eindringt und ebene Wellen im Rohr vorhanden sind.
3. Übertragungsmaß und Wellenwiderstand der Rohre sind von Strömungswiderstand, Porosität und Dicke der Wandbekleidung und vom Rohrradius abhängig.
4. Der experimentelle Vergleich zeigt Abweichungen besonders des Dämpfungsmaßes von den theoretisch zu erwartenden Werten, die teils durch die Inhomogenität des Materials und den dadurch bedingten Meßfehler, teils durch die Erkenntnis erklärt werden, daß die Schallwellen unter einem von den Daten des Wandmaterials und der Frequenz abhängigen Winkel in die Rohrwand eindringen. Die festgestellten Abweichungen sind auf die Winkelabhängigkeit des Schluckgrades zurückzuführen.
5. Aus Meßwerten wird für einige Fälle die Größe und der Frequenzgang des Einfallswinkels bestimmt und im wesentlichen Übereinstimmung mit einer von K. Schuster gegebenen Theorie festgestellt.
6. Der Eingangswiderstand der Schluckrohre stimmt bei tiefen Frequenzen mit dem Wellenwiderstand überein, nach höheren nähert er sich den Werten des Scheinwiderstandes einer Kolbenmembran. Die Unterschiede sind durch eine Verformung des Schallfeldes am Eingang bedingt.

Herrn Prof. Dr. W. Wolman und Herrn Prof. Dr. H. Barkhausen möchte ich an dieser Stelle für ihr stetes Interesse an dieser Arbeit und für viele wichtige Anregungen danken, sowie der Glasfaser-Gesellschaft Düsseldorf für die Überlassung von Versuchsmaterial.

(Eingegangen am 5. April 1940.)

SCHRIFTTUM

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

R. Feldtkeller, **Einführung in die Theorie der Rundfunk-Siebschaltungen.** Verlag S. Hirzel, Leipzig 1940. 168 Seiten mit 76 Abbildungen. Preis geh. 10,80 RM., Leinen 12,— RM.

Das Buch, das in der Buchreihe „Physik und Technik der Gegenwart" von H. Fassbender herausgegeben wird, ist eine Art Fortsetzung der an der gleichen Stelle und von demselben Verfasser in den Jahren 1938 und 1939 veröffentlichten „Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik" und „Einführung in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik". Die Theorie der Rundfunksiebschaltungen ist so umfangreich geworden und weicht von der normalen Theorie der Niederfrequenzsiebschaltungen so stark ab, daß ihr — mit Recht — ein besonderer Band vorbehalten wurde. In diesem werden behandelt: Der einstufige Verstärker mit einer einkreisigen Sieb-

schaltung, der zweistufige Verstärker mit zwei einkreisigen Siebschaltungen, der dreistufige Verstärker mit drei einkreisigen Siebschaltungen, zweikreisige Rundfunksiebschaltungen, dreikreisige Rundfunksiebschaltungen, der zweistufige Verstärker mit zweikreisigen Siebschaltungen, der dreistufige Verstärker mit einer einkreisigen und zwei zweikreisigen Siebschaltungen, Siebschaltungen mit regelbarer Breite des Durchlaßbereichs und schließlich: die Einschwingvorgänge beim plötzlichen Anlegen einer Sinusschwingung.

Die Theorie der einzelnen Siebschaltungen wird durchgängig auf der Ortskurve aufgebaut, die das komplexe Verhältnis von Eingangsspannung zu Ausgangsspannung in der Nähe der Resonanzfrequenz bildet, und die beispielsweise für die bekannten zweikreisigen Bandfilter eine gewöhnliche Parabel ist. Zunächst werden die allgemeinen, mathematischen Gesetzmäßigkeiten dieser Ortskurve ermittelt und durch besondere Kenngrößen wie Formwert, Höckerverstimmung usw. festgelegt. Danach wird der Zusammenhang zwischen diesen Kenngrößen und den Daten der zugrunde liegenden Siebschaltung abgeleitet, und schließlich ein Rechenschema angegeben, mit dessen Hilfe die Siebschaltungsdaten aus den vorgegebenen Anforderungen an die Resonanzkurve leicht berechnet werden können. Zahlenmäßig durchgeführte Berechnungsbeispiele erläutern die Ergebnisse.

Die Darstellung zeichnet sich — ebenso wie die der vorangegangenen Bände — durch ganz besondere Klarheit und Anschaulichkeit aus. Alle Rechnungen sind lückenlos durchgeführt und nur ganz elementare Vorkenntnisse beim Leser vorausgesetzt. Infolgedessen ist das Buch ein ausgezeichnetes Lehrbuch für alle diejenigen, die erstmalig in die nicht ganz einfache Theorie der Rundfunksiebschaltungen eindringen wollen, vor allem also für die Studierenden der Technischen Hochschulen. Darüber hinaus enthält das Buch — besonders in den letzten Kapiteln — aber auch neueste Forschungsergebnisse des Verfassers und seiner Mitarbeiter, so daß es auch für die Fachwelt ungewöhnlich interessant ist.

KIRSCHSTEIN

ERNST LÜBCKE, **Schallabwehr im Bau- und Maschinenwesen.** Julius Springer. Berlin 1940. 484 Seiten, 145 Abb. Preis geh. 15,— RM., geb. 16,— RM.

Das Buch ist eine Gemeinschaftsarbeit von bekannten, schallkundigen Forschern und Praktikern. Der Stoff wurde einer Vortragsreihe entnommen, die im Rahmen der technisch-wissenschaftlichen Veranstaltungen des Berliner Bezirksvereins Deutscher Ingenieure im Frühjahr 1938 abgehalten wurde, gemeinsam mit dem Außeninstitut der Technischen Hochschule Berlin und Mitgliedern des durch seine früher häufigen, regelmäßigen schalltechnischen Vorträge bekannten Fachausschusses für Lärmminderung beim VDI. Der Vortragsstoff wurde für dieses Buch umgeschrieben und ergänzt. Das Buch wendet sich zunächst an die Praktiker, die den Lärm hindern oder mindern wollen. Praktiker sind nicht immer auf dem laufenden über die letzten wissenschaftlichen Fortschritte und praktischen Erkenntnisse von Wissensgebieten, die mit ihrem Fach zusammenhängen. Sie sind daher für solche Vorträge dankbar, besonders, wenn sie auch noch in so anschaulicher und geistig leicht verdaulicher Form in Druck und Bild festgehalten werden. Auch der wissenschaftliche Forscher wird sich mit Interesse in den praktischen Teil des Buches vertiefen können, der zeigt, wie die Forschungsergebnisse in der Praxis verwirklicht werden.

E. LÜBCKE geht zunächst auf die Grundbegriffe der physikalischen und physiologischen Akustik ein und beschreibt den Schalldruckmesser, den Geräuschmesser, das logarithmische Voltmeter und seine Sonderausführung den Dämpfungsschreiber. Daran schließt sich ein Abschnitt an über die Schalleistung und die Bestimmung der Frequenzverteilung der Schallenergie.

E. MEYER bespricht das schalltechnische Prüfwesen. Er beginnt mit den physikalischen Meßverfahren (schalltechnisches Prüfen durch Beklopfen, Bestimmen der Eigenschwingungen, des dynamischen Elastizitätsmoduls und der Werkstoffdämpfung, des Strömungswiderstandes und die Werkstoffprüfung mit Ultraschall) und anschließend die technischen Meßverfahren (Messung der Luftschalldämmung von Bauteilen und des Schallschluckgrades).

L. CREMER erläutert eingehend die Grundbegriffe der Luftschalldämmung, die Wege für die Luftschallübertragung (Schalldurchgang durch Öffnungen, porige Stoffe, luftdichte, schwere Wände) und die Trittschallerregung und Messung. Gleichungen und Kurvendarstellungen unterstützen die Anschauung.

W. DÜRHAMMER geht auf die praktische Schallabwehr im Hochbau ein, und zwar auf die Maßnahmen und Stoffe zum Dämmen gegen Körperschall (Fundamente, aufgehendes Mauerwerk und Decken), gegen Luftschall (Einfach-, Doppel- und Mehrfachwände, Wanddurchbrechungen, Türen und Fenster) und schließlich auf den zulässigen Störschall in Bauten.

W. ZELLERS Vortrag, der für den Druck von E. LÜBCKE bearbeitet wurde, handelt von praktischer Schallabwehr im Maschinenwesen bei Fabrikanlagen, Stadtplanungen, Kraft- und Förderanlagen, Arbeits-, Werkzeug- und Kleinmaschinen. Zum Schluß wird die Lärmbekämpfung durch Organisation und Selbstschutz besprochen.

W. PIENING befaßt sich mit der Schallabwehr bei Fahrzeugen, ausgehend vom Kampf gegen den Verkehrslärm und den wichtigsten Lärmerregern der

Fahrzeuge (Verbrennungsmotor, elektrische Maschinen, Zahnradgetriebe, Lüfter); anschließend folgen die Maßnahmen gegen den Luft- und Körperschall, dann gegen den Lärm auf Schiffen, Schienen-, Straßen- und Luftfahrzeugen.

E. Lübcke beschließt das Buch mit einer Formel- und Tabellenübersicht über Schallgeschwindigkeiten, Schallwiderstände, Schallfeldgrößen, Schwingzahlen, Schalleistungen, technisch wichtige Lautstärken, die Größen Dezibel und Phon und die Eigenschwingungen von Hohlräumen und Körpern.

Das verdienstvolle Buch, das vom Verlag J. Springer vorzüglich ausgestattet wurde, kann allen, die mit Lärmminderungsfragen zu tun haben, warm empfohlen werden. R. Berger

Friedrich Gladenbeck, **Jahrbuch des elektrischen Fernmeldewesens.** Verlag für Wissenschaft und Leben, Georg Heidecker. Berlin 1940. 379 Seiten. Preis 22,— RM.

Das Jahrbuch, das als der wissenschaftliche Rechenschaftsbericht der Deutschen Reichspost bezeichnet werden kann, beansprucht auch für den vorliegenden 3. Band besondere Beachtung. Wie der Reichspostminister Dr.-Ing. e. h. W. Ohnesorge im Geleitwort hervorhebt, zeigt er eindringlich, wie trotz des gewaltigen Krieges, in dem Deutschland steht und in den auch die Deutsche Reichspost aufs stärkste eingespannt ist, die wissenschaftliche Forschung mit unverminderter Kraft weitergetragen und über den großen Gegenwartsaufgaben das Wirken für die künftige Entwicklung und den Ausbau friedlicher Beziehungen nicht vergessen wird.

Fast die Hälfte des Inhalts ist dem Fernsehen gewidmet, dessen allgemeine Einführung kurz vor dem Kriege durch die Freigabe des Einheitsfernsehempfängers eingeleitet worden war. Leider konnte infolge des Krieges die Fabrikation dieses Empfängers nicht aufgenommen werden, doch dürfte die außerordentliche technische und organisatorische Leistung der Entwicklung dieses Gerätes zu einem so niedrigen Verkaufspreis von 650,— RM. sich später noch wesentlich auf die schnelle Einführung des Fernsehrundfunks auswirken.

F. Gladenbeck, der Herausgeber des Jahrbuchs und Präsident der Forschungsanstalt der Deutschen Reichspost, behandelt in seiner Arbeit die Gesamtprobleme des Fernsehens und gibt den derzeit erreichten Stand der Technik an. A. Karolus und W. Hasel berichten über Großbildanlagen nach dem Zellenrasterverfahren. Jedem Bildpunkt wird bei diesem Verfahren in einer großen Tafel eine kleine Glühlampe zugeordnet. Die Erfahrungen beim Aufbau einer Tafel mit 40000 Bildelementen werden geschildert. Die zweite Möglichkeit der Fernseh-Großbilderzeugung mit Braunscher Röhre wird von R. Möller und R. von Felgel erörtert. Auch hier ist die Schwierigkeit, eine ausreichende Gesamthelligkeit zu bekommen, außerordentlich, da ja bei der heute gültigen Norm der jeweils angeregte Bildpunkt nur $^1/_{20000}$ der Gesamtfläche ausmacht und er nur während $^1/_5$ millionstel Sekunde (2×10^{-7} s) aufblitzt, welches Aufleuchten sich 25mal in der Sekunde wiederholt. Wenn man hier von Anodenspannungen von 80000 Volt, von wassergekühlten Kathodenstrahl-Röhren und von Bleipanzern zum Schutz vor Röntgenstrahlen liest, glaubt man, mit einem Sondergebiet der Starkstromtechnik zu tun zu haben. Die Arbeit K. Krawinkels, „Die Bildspeicherung und einige Möglichkeiten ihrer praktischen Anwendung", weist den Leser auf Probleme hin, die bisher auch nicht in ähnlicher Form auf anderen Gebieten aufgetreten sind. Das Problem der Speicherung, das man in der Akustik etwa durch den magnetisierbaren Träger (Stahldraht) beherrscht, versucht man im Fernsehen auf die mannigfaltigste Weise meist mit Hilfe kleinster Kondensatoren, deren Ladungen mit einem Kathodenstrahl abgetastet werden, zu lösen. Auch das Ultraschall-Lichtrelais wird hier erprobt. Die beiden folgenden Aufsätze von K. O. Schmidt und H. Bornemann haben die Zusammendrängung und die Erweiterung des Frequenzbandes eines Übertragungskanals zum Thema. K. O. Schmidt behandelt die Möglichkeiten einer Zusammendrängung ganz allgemein, auch für Telegraphie, Bildtelegraphie und Fernsehen, kommt jedoch zu dem Schluß, daß wohl nur durch Nebenbenutzung des Fernsehfrequenzbandes eine wirtschaftliche Ersparnis möglich ist. H. Bornemann berichtet insbesondere über die auf Anregung des CCIF eingeleitete Verbreiterung des Fernsprechfrequenzbandes bis zu 3400 Hz. Die mehr technische Aufgabe des Anschlusses mehrerer Teilnehmer an eine Zubringerleitung, eine Aufgabe, die auch infolge der derzeitigen Rohstofflage vorwärtsgetrieben werden muß, behandelt W. Pietsch. Auch die von W. Waldow und E. Buchmann der Bearbeitung unterzogenen Drahtfunkprobleme und die Betrachtungen über die Wirtschaftlichkeit des Funkfernsprechdienstes von W. Hahn sind technisch-wirtschaftlicher Natur. H. Giess bringt den neuen Rundfunkwellenplan von Montreux. Den Abschluß des Buches bildet eine wertvolle zusammenfassende Darstellung der Dezimeterwellenphysik von O. H. Grocs und eine kurze Abhandlung von F. Gelfius über das Patentwesen und die Deutsche Reichspost. Sie läßt die großzügige Einstellung der Reichspost ihren Erfindern gegenüber erkennen und gibt einen Einblick in die Arbeiten des Patentbüros der Forschungsanstalt der Deutschen Reichspost.

M. Grützmacher

PHILIP M. MORSE, **The Transmission of Sound Inside Pipes.** J. Acous. Soc. Am. 11 (1939), S. 205.

Es wird die Schallausbreitung längs eines Rohres mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt behandelt. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Rohrquerschnitt so groß ist, daß Verluste durch Luftreibung vernachlässigt werden können und daß also die Dämpfung durch den Energieverbrauch der Wände bestimmt wird.

Zuerst wird der einfache Fall behandelt, daß bei rechteckigem Querschnitt (ll′) nur eine innere Fläche gleichmäßig mit absorbierendem Material bedeckt ist, während die übrigen drei Flächen vollkommen starr sind. Die Rohrachse sei parallel zur X-Achse und die absorbierende Fläche sei in der Ebene $y=l$. Dann erhält man als Lösungsansatz für den Schalldruck im Rohr

$$p = P_0 \operatorname{Cof}\left[\frac{\pi y}{l}(\varkappa - j\mu)\right] \cdot e^{j\omega t - \frac{\omega}{c}(\sigma + j\tau)x},$$

wobei ω die Kreisfrequenz und c die Schallgeschwindigkeit im freien Medium sind. Der Ansatz für p bedeutet, daß man eine in der X-Richtung mit der Phasengeschwindigkeit $\frac{c}{\tau}$ fortschreitende Welle annimmt, wobei σ die Dämpfung bestimmt. Die Verteilung des Schalldrucks über den Querschnitt wird durch die Verteilungsparameter $\varkappa$ und μ gegeben. In der Y-Richtung ändert sich der Schalldruck nach Betrag und Phase, während er in der Z-Richtung wegen der Spiegelung an den starren Wänden als konstant angesetzt wird. Wenn man den Lösungsansatz in die Wellengleichung einsetzt, erhält man eine Beziehung zwischen den Übertragungsparametern σ und τ und den Verteilungsparametern $\varkappa$ und μ.

$$(1) \qquad (\sigma + j\tau)^2 = \left(\frac{\mu}{\eta} + j\frac{\varkappa}{\eta}\right)^2 - 1$$

$$\eta = \frac{2l}{\lambda} = \frac{l\omega}{\pi c}.$$

Der Frequenzparameter η mißt den Abstand der absorbierenden Fläche von der gegenüberliegenden starren Wand in Einheiten der halben Wellenlänge für das freie Medium. Die Randbedingungen des Problems lauten:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0 \text{ u. } z = l'$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0$$

$$-\frac{\mathfrak{Z}}{j\omega\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = p \quad \text{für} \quad y = l.$$

ϱ bedeutet die Dichte der Luft und $\mathfrak{Z}$ ist der Wandwiderstand des absorbierenden Materials. Der Wandwiderstand ist definitionsgemäß das komplexe Verhältnis von Schalldruck zu wandnormaler Schnelle an der Oberfläche.

Aus dem Lösungsansatz und den Randbedingungen erhält man folgende Beziehung zwischen den Verteilungsparametern und dem Wandwiderstand

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{Cot}[-j\pi(\mu + j\varkappa)]}{\mu + j\varkappa} = \frac{\mathfrak{Z}}{\varrho c \eta} \equiv e^{\ln\frac{|\mathfrak{Z}|}{\varrho c \eta} + j\varphi}.$$

Daraus folgt, daß es zu einem gegebenen Wandwiderstand $\mathfrak{Z}$ eine unendliche Zahl von Verteilungsparametern gibt, die alle mit den Randbedingungen vereinbar sind. Mit diesen Eigenwerten erhält man also, wie es sein muß, statt des einfachen Lösungsansatzes eine allgemeinere Lösung in Form einer Summe, die zur Erfüllung einer vorgegebenen Schall-

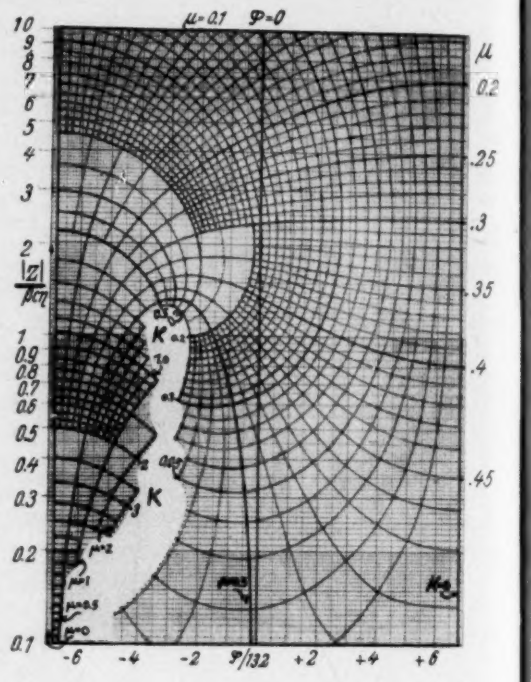


Abb. 1. Konforme Abbildung zwischen dem Wandwiderstand und den Verteilungsparametern (nach Gl. 2) für die erste RIEMANNsche Fläche

druckverteilung in der Y-Richtung z. B. am Anfang des Rohres geeignet ist. Ordnet man die Verteilungsparameter, die zu einem Wandwiderstand $\mathfrak{Z}$ gehören, nach wachsenden Werten von μ, so erhält man eine Einteilung der Lösungsanteile mit zunehmender Zahl von Druckknoten in der Y-Richtung.

Es werden nicht nur formelmäßig, sondern auch in graphischen Darstellungen die wichtigsten Hilfsmittel angegeben, die z. B. bei vorgegebenem Wandwiderstand zur Bestimmung der Verteilungsparameter und dann zur Bestimmung der Übertragungsparameter dienen können.

Abb. 1 zeigt z. B. die erste RIEMANNsche Fläche für den Zusammenhang zwischen dem Wandwiderstand und den Verteilungsparametern nach Gl. 2

Ordinate ist der Betrag des Wandwiderstandes in logarithmischem Maßstab auf $\varrho\, c$, den Schallwellenwiderstand der Luft, und den Frequenzparameter η bezogen, und Abszisse ist der Phasenwinkel φ des Wandwiderstandes auf den konstanten Faktor 13,2 bezogen. Die orthogonalen Kurvenscharen entsprechen den Kurven für konstantes μ bzw. $\varkappa$. Aus dieser Abbildung erhält man den kleinsten Wert für μ, der im allgemeinen einer Schalldruckverteilung in der Y-Richtung ohne Knoten entspricht.

Abb. 2 zeigt eine konforme Abbildung nach Gl. 1 zwischen den Verteilungsparametern $\varkappa$ und μ, die auf den Frequenzparameter η bezogen werden, und den Übertragungsparametern σ und τ.

Es werden auch Näherungslösungen für einige Grenzfälle der Formeln (1) und (2) angegeben. In einigen speziellen Fällen lassen sich die diskutierten Formeln und Darstellungen bei geeigneter einfacher Transformation auch für Rohre mit zwei oder mehreren absorbierenden Wänden benutzen. Schließlich wird noch die Schallausbreitung in einem Rohr mit kreisförmigem Querschnitt behandelt. Die Lösung führt auf Besselsche Funktionen. Mit Hilfe von Reihen kann man bei gegebenen Verteilungsparametern den zugehörigen Wandwiderstand berechnen.

Es wird als interessantes Ergebnis der theoretischen Betrachtungen festgestellt, daß mit gewissen Ausnahmen ein Wandwiderstand mit Steifigkeit mehr Schalldämpfung ergibt als einer mit einem entsprechenden Massenwiderstand. Es gilt auch die Regel, daß die höheren Komponenten der Wellenanteile im allgemeinen sehr viel stärker gedämpft werden, als die niedrigste Komponente mit dem kleinsten Wert von μ.

Die mathematischen Hilfsmittel in der behandelten Arbeit sind für die Lösung vieler wichtiger Probleme ausreichend und daher von großer praktischer Bedeutung. Es sei noch darauf hingewiesen, daß das gleiche Problem mit übereinstimmenden theoretischen Ergebnissen auch unabhängig von L. Cremer behandelt worden ist. Lippert

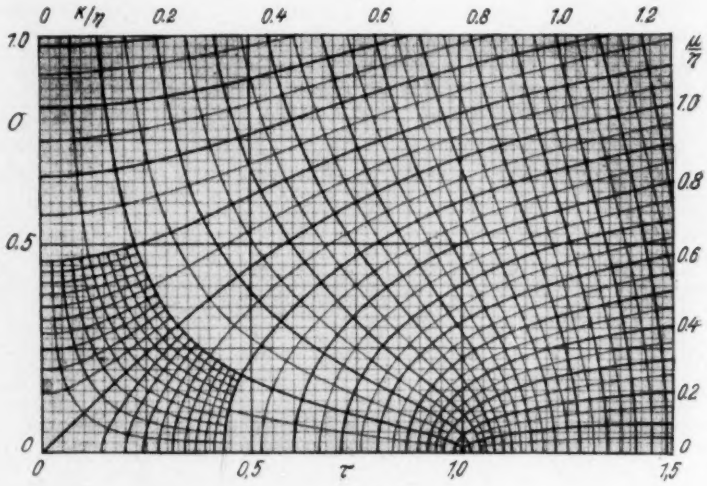


Abb. 2. Konforme Abbildung zwischen den Verteilungs- und den Übertragungsparametern (nach Gl. 1)

T. Hayashi. **Measurement of Sound Intensity under Water by Resonance Disk.** Electrotechn. J., Tokyo **3** (1939), Nr. 8, S. 175.

Die Arbeit behandelt die Anwendung der Rayleigh-Scheibe in Resonanz, welche für Luftschall bereits von Sivian beschrieben wurde, zur Messung der Schallintensität in Wasser. Die Resonanz-R-Scheibe vermeidet die Nullpunkt-Unsicherheit der stationären Messung und besitzt eine größere Empfindlichkeit.

Die an dem Torsionsfaden aufgehängte Scheibe bildet mit diesem ein schwingungsfähiges Gebilde, dessen Resonanzeigenschaften durch die Torsionskonstante K des Fadens, das Trägheitsmoment I_w, bestehend aus dem der Scheibe I_s und dem der mitschwingenden Mediummasse $i = 16/45 \cdot \varrho\, r^5$ sowie einen Verlustfaktor μ_w bestimmt sind. In Luft kann die mitschwingende Mediummasse vernachlässigt werden, so daß sich die Eigenfrequenzen in Luft und in Wasser ergeben:

$$\omega_w^2 = \frac{K}{I_w} - \alpha_w^2; \qquad \alpha_w = \frac{\mu_w}{2 \cdot I_w},$$

$$\omega_L^2 = \frac{K}{I_s} - \alpha_L^2; \qquad \alpha_L = \frac{\mu_L}{2 \cdot I_s}.$$

Durch Messung von ω_L, α_L, ω_w, α_w und Berechnung von I_s können K, I_w und μ_w bestimmt werden. Der Verfasser prüft die Beziehung $I_w = I_s + i$ indirekt durch Berechnung von ω_w mit Hilfe von $I_s + i$ und findet ungefähre Übereinstimmung mit der gemessenen Eigenfrequenz.

Wirkt auf die R-Scheibe ein sinusförmig wechselndes Drehmoment $D \cdot \sin \omega t$, so führt diese eine erzwungene Schwingung mit der maximalen Auslenkung Θ und der Phasenverschiebung φ aus. In der Resonanz ist

$$\Theta = \frac{D}{\mu_w} \cdot \left(\omega_w + \frac{1}{2}\,\alpha_w^2\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \varphi = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega_w}{\alpha_w}.$$

Die Empfindlichkeit der Anordnung kann also berechnet werden. Bei der Berechnung der Schallintensität aus dem Drehmoment D muß die Korrektur nach Wood beachtet werden.

Eine Strömung der Geschwindigkeit V verändert das durch die Schallschnelle v (Effektivwert) bewirkte Drehmoment: $D = 4/3 \cdot \varrho\, r^3\, (V^2 + v^2)$. Bei Proportionalität von Auslenkung und Drehmoment kann der Einfluß der Strömung also subtraktiv ausgeschaltet werden, solange diese genügend konstant bleibt. Bei hochempfindlichen R-Scheiben wird die Bestimmung des Nullpunktes jedoch unsicher. Die Verschiebung der Null-Linie bewirkt bei der Resonanzmethode keinen Fehler, solange die Auslenkung genügend klein ist.

Die Theorie wird durch die experimentelle Untersuchung einer R-Scheibe in Wasser bei ungefähr 17,6 kHz ergänzt. Die im Wasser befindliche Scheibe (Wolfram bzw. Glimmer von 10 bzw. 9 mm ∅ und 0,35 bzw. 0,53 mm Dicke) ist durch einen kurzen Draht mit dem Anzeigespiegel dicht über der Oberfläche starr verbunden. Dieses System ist an einem dünnen Faden (92 mm lang, 0,04 mm ∅) dicht (1,2 cm) vor dem Magnetostriktionssender aufgehängt. Durch rechteckige Schallimpulse (periodische Unterbrechung der Senderfrequenz) wird die R-Scheibe in Schwingungen versetzt. Die Auslenkung durchläuft bei Änderung der Unterbrechungsfrequenz eine Resonanz, welche für die Glimmerscheibe bei 1,5 Hz, für die Wolframscheibe bei 0,9 Hz liegt. Die entsprechenden Werte sind in Luft 2,8 bzw. 1,1 Hz. Bei der schweren Wolframscheibe hat die mitschwingende Wassermenge nur geringen Einfluß. Die Halbwertsbreite (0,5 Hz) ist größer als in Luft, so daß die Einstellung der Resonanz nicht kritisch ist. Die quadratische Abhängigkeit zwischen Auslenkung und Schnelle bzw. Senderspannung wird experimentell bestätigt und ergibt für die Resonanz eine 15mal größere Empfindlichkeit als die statische Messung. Ein Oszillogramm von Senderspannung und Auslenkung zeigt die Sinusförmigkeit der Auslenkung und ihre Phasenverschiebung gegen die Impulse. Als Anwendungsbeispiel wird die Frequenzkurve des Schallsenders aufgenommen. K. Tamm

The Propagation of Shock Waves in Air. J. Acous. Soc. Am. 11 (1939); I. L. Thompson and N. Riffolt, S. 233; II. L. Thompson, S. 245.

I. Der Teil I der Arbeit befaßt sich in der Hauptsache mit der Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit V sphärischer Knallwellen, die mit hochbrisanten Sprengladungen erzeugt werden. Es zeigt sich, daß sich die Abhängigkeit der Geschwindigkeit V der Stoßfront von der Entfernung s vom Wellenzentrum darstellen läßt in der Form $V/a = \left(1 + C/(\varphi + x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ mit $C = \left((V_d^2 - a^2)/a^2\right)(\varphi + 1)^2$; die Formel genügt den Randbedingungen $V = V_d$ für $x = 1$ und $V = a$ für $x = \infty$. Es ist a die normale Schallgeschwindigkeit, φ eine Konstante, $x = K\,s$, $1/K$ der Radius derjenigen Kugelfläche, auf der V den Randwert V_d annimmt. Gemessen wird nicht V direkt, sondern die Zeit δt, die die Wellenfront braucht, um von der Kugelfläche mit dem Radius $1/K$ zu derjenigen mit dem Radius s zu gelangen. Durch Integration $\delta t = \int_{x=1}^{x=Ks} (1/K\,V(x))\,dx$ erhält man die Beziehung $K\,a\,\delta t = (x^2 + 2\varphi x + C_1)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=1}^{x=Ks}$ mit $C_1 = C + \varphi^2$, in der die Konstante φ experimentell ermittelt wird. Die Randgeschwindigkeit V_d kann im allgemeinen beliebig vorgegeben werden. Bei den in den Experimenten der Verfasser benutzten kugelförmigen Sprengladungen hoher Brisanz vom Radius $1/K$ ist die Geschwindigkeit V_d in der an der Ladung anliegenden Luftschicht gleich der Geschwindigkeit der Detonationswelle in der Ladung. Diese Geschwindigkeit ist etwa gleich 5000 m/sec, wenn die Dichte der Ladung nahezu gleich 1 ist; für Ladungen mit von 1 abweichender Dichte läßt sich der Radius $1/K$ der äquivalenten kugelförmigen Ladung der Dichte 1 berechnen, die für $s = 1/K$ die Randgeschwindigkeit $V_d \approx 5000$ m/sec liefern würde. Aus den Messungen der Verfasser ergibt sich bei Verwendung kugelförmiger Ladungen für die Konstante φ der Wert $\varphi = 3$ unabhängig von der Größe der Ladung, also unabhängig von K. (Allgemein ist φ bei gegebener Gestalt der Schallquelle unabhängig von deren Größe.) Diese Ergebnisse modifizieren sich etwas bei Verwendung zylindrischer Ladungen; bei diesen ist eine enge Zone um den Sprengkörper zu berücksichtigen, in der die Ausbreitungsgeschwindigkeit V sich wenig ändert, offenbar findet in diesem Falle in der Nähe der Ladung zylindrische Wellenausbreitung statt. Auf der an Hand des Ausdrucks für $K\,a\,\delta t$ berechneten Kurve ($K\,a\,\delta t$ als Funktion von $x - 1$) liegen alle Meßpunkte der Verfasser und auch die anderer Autoren; die Kurve erweist sich als gültig für einen weiten Bereich der Größen der Sprengladungen.

Bei den meisten Messungen der Verfasser wurden zur Bestimmung der Laufzeiten δt sechs piezoelektrische Druckempfänger benutzt, die in passenden Abständen in einer Reihe vor der Sprengladung aufgehängt wurden (Abstand des letzten Mikrophons von der Ladung etwa 15—20 m). Der Augenblick der Ankunft der Stoßwelle an jedem der Empfänger wurde mit Hilfe eines Satzes steifer Oszillographenschleifen auf einem laufenden Film registriert; zur Zeiteichung diente in üblicher Weise eine Stimmgabel. Die Zeit $\delta t = 0$ der Ankunft der Welle an der Oberfläche der Ladung wurde mit Hilfe eines „Unterbrechers", eines dünnen um die Ladung gewickelten Drahtes, bestimmt. Die Ladungen wurden elektrisch gezündet. Bei der Auswertung der Messungen wurden die nötigen Windkorrektionen an den Meßergebnissen angebracht.

Die von den Verfassern aufgestellte Kurve, die V/a als Funktion von $x - 1$ darstellt, weicht von

den nach RÜDENBERG berechneten Kurven ab, die nicht im Einklang mit den Messungen der Verfasser sind. Als eine der Ursachen für die Abweichung wird angenommen, daß RÜDENBERG nicht berücksichtigt, daß bei hochbrisanten Sprengstoffen die Stoßwelle in der Luft, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit V gemessen wird, den sich ausbreitenden Gasprodukten der Zersetzung des Sprengkörpers vorauseilt. Diese Tatsache ergibt sich aus photographischen Messungen der Verfasser und wird durch die Erfahrungen anderer Autoren bestätigt.

Zur Veranschaulichung des Abfalls der Geschwindigkeit V mit der Entfernung von der Sprengladung diene das folgende Beispiel: bei einer Randgeschwindigkeit $V_d = 5000$ m/sec ist im Abstande 10 Radien der kugelförmigen Ladung von deren Mittelpunkt $V = 1572$ m/sec, in Abstand 20 Radien vom Mittelpunkt $V = 932$ m/sec, im Abstand 100 Radien $V = 391$ m/sec; die normale Schallgeschwindigkeit wird im Abstande von etwa 500 Radien erreicht.

Neben der Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit V der Stoßwelle wird im Teil I der Arbeit ein Versuch durchgeführt, die an einer Stelle des Raumes beim Passieren des Verdichtungsstoßes auftretenden maximalen Drucke zu messen. Wegen der Kürze der Verdichtungszeiten, die z. T. unter 10^{-11} sec liegen, wird zur Druckmessung ein ballistisches Meßgerät benötigt. Als solches betrachten die Verfasser das von ihnen benutzte Seignettekristallmikrophon in Verbindung mit einem Kathodenstrahloszillographen, das aus zwei in Reihe geschalteten Kristallen besteht, die ohne feste Halterung oder Gehäuse auf einer Bakelitplatte durch Umwicklung mit einem Faden befestigt sind. Sie nehmen an, daß die am Oszillographen auftretenden Maximalausschläge den an der Mikrophonoberfläche auftretenden maximalen Drucken proportional sind. Eine Absoluteichung des Meßgerätes gelingt nicht, und es kann daher nur der Verlauf der gemessenen relativen Druckwerte als Funktion der Stoßgeschwindigkeit V verglichen werden mit dem Druckverlauf in Abhängigkeit von V, der sich aus theoretischen Überlegungen ergibt. Das ungeschützte Mikrophon kann bei diesen Messungen wegen der Gefahr der Beschädigung nicht nahe an die Sprengladungen herangebracht werden, und es sind daher nur Messungen im Geschwindigkeitsbereich $1 \leq V/a \leq 2$ möglich.

II. Im Teil II der Arbeit wird versucht, an Hand theoretischer Beziehungen zwischen dem Druck p und der Dichte ϱ in der Stoßwelle und der Geschwindigkeit V, mit der sich die Stoßfront in das ruhende Medium hinein ausbreitet, die bei der Verdichtung auftretenden Größen p und ϱ mit Hilfe der gemessenen Werte V zu berechnen. Als Beziehung zwischen p und ϱ benutzt der Verfasser die für die ebene stationäre Stoßwelle in idealen Gasen gültige HUGONIOTsche Adiabatengleichung $p/p_0 = ((\varkappa+1)\,\varrho - (\varkappa-1)\,\varrho_0)/((\varkappa+1)\,\varrho_0 - (\varkappa-1)\,\varrho)$; $\varkappa$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen, ϱ_0 und p_0 sind Dichte und Druck des ruhenden Mediums, ϱ und p die entsprechenden Größen unmittelbar hinter der Front der Stoßwelle. Der Verfasser nimmt ferner an, daß die Fortschreitungsgeschwindigkeit V der Stoßfront gleich der einer Unstetigkeit zweiter Ordnung im HUGONIOTschen Sinne ist. Danach ist $V^2 = dp/d\varrho$, wobei hier V mit ϱ veränderlich ist. Aus dieser Gleichung und der Adiabatengleichung gewinnt er die gewünschten Beziehungen zwischen ϱ und V und p und V. Unter der Voraussetzung, daß diese Beziehungen auch für die Verdichtung in den in dieser Arbeit behandelten sphärischen Stoßwellen gültig sind, können dann aus den im Teil I gemessenen Geschwindigkeiten V die zugehörigen Drucke p und Dichten ϱ berechnet werden. Es ist zu bemerken, daß die auf dem vom Verfasser benutzten Wege berechneten Beziehungen zwischen ϱ und V und p und V nicht denjenigen entsprechen, die sich aus der HUGONIOT-Gleichung und der in der RIEMANNschen Theorie des stationären Verdichtungsstoßes auftretenden Gleichung $V = \sqrt{\varrho\,(p - p_0)/\varrho_0\,(\varrho - \varrho_0)}$ ergeben; diese Beziehung zwischen V, ϱ und p folgt dort aus den Bedingungsgleichungen, die die Konstanz des sekundlichen Transportes von Masse und Impuls ausdrücken. (Bemerkung des Referenten: Zur Begründung dieser Berechnungsweise siehe R. BECKER, Z. Phys. 8 (1922), S. 321.) Der Verfasser bezeichnet die Gleichung, die in diesem Falle p als Funktion von V darstellt, als RAYLEIGHS Formel. Den gesamten auf das zur Druckmessung benutzte Mikrophon ausgeübten Druck p_g berechnet der Verfasser als Summe des doppelten Druckes p, der sich in der oben angegebenen Weise aus der Geschwindigkeit V ergibt, und des Staudrucks, der zu der Teilchengeschwindigkeit V_g hinter der Stoßfront gehört; V_g erhält man unmittelbar aus der Stetigkeitsbedingung für den Mediumstrom im Falle des ebenen Verdichtungsstoßes. Für das Verhältnis der spezifischen Wärmen werden wahlweise die Werte $\varkappa = 7/5$ und $\varkappa = 5/3$ benutzt (s. unten). Der Verlauf der Drucke p_g als Funktion von V wird für beide Werte $\varkappa$ berechnet, zum Vergleich auch unter Zugrundelegung der Beziehung zwischen p und V, die als RAYLEIGHS Formel bezeichnet wird. Die berechneten Kurven werden verglichen mit der im Teil I gemessenen; dabei werden dieser in passender Weise absolute Beträge des Druckes zugeordnet. Der gemessene Verlauf von p_g mit V deckt sich im Druckbereich der Messungen $1 \leq V/a \leq 2$ für beide Werte $\varkappa$ gut mit dem auf dem vom Verfasser gewählten Wege berechneten, weniger gut mit dem Verlauf der Kurven, die bei Benutzung der RAYLEIGHformel herauskommen. Eine Entscheidung zwischen

den berechneten Kurven ist jedoch wegen der verschiedenen Unsicherheiten der Meßmethode nicht möglich.

Die Frage, welcher Wert für das Verhältnis $\varkappa$ der spezifischen Wärmen bei der Berechnung der bei der Verdichtung auftretenden Drucke p und Dichten ϱ zu setzen ist, wird ausführlich diskutiert. Wegen der großen Teilchengeschwindigkeiten in der Ausbreitungsrichtung der Stoßwelle bei größeren Stoßgeschwindigkeiten V wird den Gasmolekülen in diesen Fällen nur ein Freiheitsgrad der Translation zugeschrieben. Es wird angenommen, daß die Rotationsenergie trotz der Kürze der Verdichtungszeiten stets voll angeregt ist, daß dagegen die Schwingungsenergie wegen deren Relaxation und der Kürze der Verdichtungszeiten auch bei relativ hohen Geschwindigkeiten V bzw. Temperaturen, bei denen sie im Gleichgewicht schon nahezu voll angeregt wäre, noch keine bedeutenden Beiträge zur Gesamtenergie liefert. Erst bei sehr großen V werden diese Beiträge erheblich. Der Verfasser kommt zu dem Schluß, daß bei kleinen Geschwindigkeiten V für die Zahl f der Freiheitsgrade der Gasmoleküle der Wert $f = 5$ zu setzen ist, mit wachsendem V/a wächst oberhalb $V/a = 1{,}5\,f$ an auf $f = 3$ und nimmt dann oberhalb $V/a = 3$ wieder auf $f = 5$ ab; das Verhältnis der spezifischen Wärmen bewegt sich demgemäß von $\varkappa = 7/5$ über $\varkappa = 5/3$ wieder auf den Anfangswert $\varkappa = 7/5$ zurück.

Zum Schluß ein Beispiel für die vom Verfasser berechneten Drucke usw.: Mit $\varkappa = 7/5$ ergeben sich für $V/a = 10$ die Verdichtung $(\varrho - \varrho_0)/\varrho_0 = 4{,}5$, die relative Druckänderung $(p - p_0)/p_0 = 63$, die relative Teilchengeschwindigkeit $V_g/a = 8{,}2$ und der Gesamtdruck $p_g = 690$ Atm. OBERST

J. OBATA, Y. MATUMURA, R. KANAYAMA und Y. YOSIDA, **Intense Combination-Tones produced by the Flutter of an Airscrew.** Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ. 15, 1 (1940), Nr. 187.

Bei der Untersuchung der Resonanzschwingungen von Flugzeugpropellern, die sich durch ein starkes Resonanzgeräusch bemerkbar machen und häufig die Ursache für Propellerbruch sind, wird festgestellt, daß das Resonanzgeräusch eine große Anzahl sehr starker Spektralkomponenten enthält, die nachweisbar objektive Kombinationstöne in der Luft darstellen.

Die Untersuchungen wurden mit einem dreiflügeligen, aluminiumlegierten Propeller von 2,85 m Durchmesser ausgeführt. Es wurden zunächst die ersten Eigenfrequenzen des nichtrotierenden Propellers experimentell genau festgestellt, und zwar sowohl bei Biegung als auch bei Torsion. Dann wurde der Propeller mit einem Elektromotor angetrieben und das Propellergeräusch kurz vor und bei der Resonanzumdrehungszahl in etwa 25 m Entfernung mit einem Kondensatormikrophon aufgenommen und nach der Frequenz analysiert. Das Propellergeräusch besteht im allgemeinen aus zwei Anteilen, dem eigentlichen Drehklang, der mehr oder weniger viel harmonische Teilkomponenten enthält und dessen Grundton durch die Umdrehungs- und Flügelzahl des Propellers bestimmt wird und einem unregelmäßigen Geräusch, das von Luftwirbeln herrührt und sich etwa auf den Frequenzbereich von 300—1000 Hz erstreckt. Im Falle der Resonanz treten außerdem noch eine ganze Reihe sehr starker Frequenzkomponenten auf, die in bestimmten Frequenzbereichen sehr regelmäßig, nämlich immer im Abstand der Grundkomponente (87 Hz) des Umlaufgeräusches voneinander angeordnet sind und deren absolute Frequenzen auch genau bestimmt werden können durch Summen- oder Differenzbildungen zwischen den Eigenfrequenzen der Torsionsschwingung (Grundschwingung 315 Hz, 1. Oberschwingung 575 Hz) und den Frequenzen des Drehklanges.

Diese unharmonischen Geräuschkomponenten entstehen als Kombinationstöne aus dem Drehklang und den Torsionsschwingungen des Propellers in Übereinstimmung mit den Feststellungen von HELMHOLTZ, daß objektive Kombinationstöne auftreten, wenn dieselbe Luftmasse von zwei sehr starken, sinusförmigen Tönen erregt wird. Bei dem Drehklang eines Flugzeugpropellers werden aber bekanntlich sehr starke Schalldrucke (etwa 1/3 Atm.) erzeugt, und ähnliches gilt für die Torsionsschwingung des Propellers, bei welchem die Verdrehungen der Flügelspitzen aus Beobachtungen im reflektierten Licht auf 1—2 cm geschätzt wurden.

In dem weiteren Teil der Arbeit wird mit mechanischen Resonatoren und elektrischen Hilfsmitteln eingehend nachgewiesen, daß die beobachteten Kombinationstöne keinesfalls in der Empfängerapparatur entstanden sein können, sondern wirklich in den Luftschwingungen vorhanden sind. Dabei wird außerdem noch untersucht, unter welchen Bedingungen man auch mit zwei Lautsprechern bei verschiedener sinusförmiger und starker Erregung objektive Kombinationstöne erzeugen kann. (Die Lautsprecher müssen dabei gegenüberstehen und sich beinahe berühren, so daß eine bestimmte Luftmasse von ihnen etwa eingeschlossen wird.)

Als Beispiel für die starke Beanspruchung des Propellers bei der hier beschriebenen Resonanzerscheinung sei erwähnt, daß kurz vor Abschluß der Untersuchungen die Flügel Risse bekamen, was sich auch dadurch bemerkbar machte, daß das Resonanzgeräusch erst bei höherer Umdrehungszahl auftrat.

Die behandelte Arbeit stellt sowohl einen Beitrag zur Untersuchung des Propellergeräuschs als auch eine gute Ergänzung des geringen experimentellen Materials über objektive Kombinationstöne dar.

LIPPERT

J. de Boer und K. de Boer, **Das Kehlkopfmikrophon.** Philips techn. Rdsch. 5 (1940), Heft 1, S. 6.

Es werden die Konstruktion und die Eigenschaften zweier Kehlkopfmikrophone beschrieben, mit denen ein Telephonieren auch an lärmerfüllten Orten ermöglicht werden soll.

In einer kurzen Betrachtung über den Sprachmechanismus wird zunächst festgestellt, daß der Kehlkopf die geeignetste Stelle zum Abtasten der Sprachschwingungen ist. Bei einer Untersuchung, wie sich das Verhältnis zwischen der Geschwindigkeitsamplitude der Luftbewegung und der Kehlkopfbewegung mit der Frequenz ändert, ergibt sich in dem für die Sprachverständlichkeit hauptsächlich interessierenden Bereich von 200—3000 Hz im Mittel eine etwa mit dem Quadrat der Frequenz ansteigende Kurve. Eine entsprechende quadratische Kennlinie des Kehlkopfmikrophons, das durch ein in einem Gehäuse federnd eingespanntes Schwingungselement (Kristall oder Membran) schematisch dargestellt werden kann, läßt sich unterhalb der Resonanzfrequenz bei sog. indirekten Antrieb erreichen, bei dem das Mikrophongehäuse relativ zum Schwingungselement zu Bewegungen angeregt wird (Schüttelmikrophon).

Es werden zwei praktische Ausführungsformen beschrieben, und zwar das Kristall- und das Kohlegrieß-Kehlkopfmikrophon. Die Wirkungsweise des Kristallmikrophons beruht auf dem bekannten piezoelektrischen Effekt. Der verwendete Kristallbieger besitzt eine Kapazität von etwa 1000 pF und wird zu Biegeschwingungen angeregt, wobei die Eigenresonanz, die in geeigneter Weise gedämpft wird, bei etwa 1700 Hz liegt. Beim Sprechen mit normaler Lautstärke erhält man eine Empfindlichkeit von etwa 20 mV an 10^5 Ohm bei guter Übereinstimmung mit der gewünschten Frequenzkennlinie im Bereich von 100—3000 Hz.

Beim Kohle-Kehlkopfmikrophon wurde auch der indirekte Antrieb verwendet, jedoch bei der Dimensionierung auf größtmögliche Empfindlichkeit Wert gelegt. Die Dicke der Kohlegrießschicht, die sich zwischen einer Metallplatte und einer kreisförmigen, quer im Gehäuse eingespannten Membran befindet, beträgt etwa 1 mm. Beim Sprechen mit normaler Lautstärke gibt das Kohle-Kehlkopfmikrophon eine mittlere Leistung von 0,2 mW ab und kann auch mit Hilfe eines Zwischenstücks in einem üblichen Fernsprechgerät verwendet werden.

Die Lärmempfindlichkeit des Kehlkopfmikrophons kann annähernd berechnet werden; in einem Raum mit 114 phon Störpegel, also etwa dem mittleren Lärm in einer Flugzeugkabine, erhält man bei normalem Sprechen nur eine Störspannung von etwa 20% der Mikrophonnutzspannung. Um die Leistungsfähigkeit des Kehlkopfmikrophons besser beurteilen zu können, wurden Verständlichkeitsmessungen vorgenommen. Ohne Störgeräusch bzw. bei einem Störgeräusch von 123 phon war die Wortverständlichkeit beim Kristall-Kehlkopfmikrophon 86% bzw. 80%, beim Kohle-Kehlkopfmikrophon 77% bzw. 68% und bei einem normalen Telephonmikrophon 90% bzw. schon bei etwa 90 phon Störgeräusch gleich null.

Die beiden beschriebenen Typen des Kristallmikrophons sind wegen des indirekten Antriebs sehr robust und in den Abmessungen so klein gehalten, daß sie z. B. bequem in einer Fliegerkappe untergebracht werden können. Überall, wo in lärmerfüllten Räumen telephonisch Befehle erteilt werden müssen, sowie in Verbindung mit Gasmasken wird das Kehlkopfmikrophon vorteilhaft zu verwenden sein. Lippert

Akustisches Schrifttum
in Zeitschriften des Jahres 1939

Bearbeitet von **K. Patermann**

(Fortsetzung und Schluß)

The force-time law governing the impact of a hammer on a stretched string. N. Davy, J. H. Littlewood & M. McCaig. Phil. Mag. **27** (1939), Nr. 181, S. 133 bis 143.

New system of tuning pianos. W. B. White. J. Acous. Soc. Am. **10** (1939), Nr. 3, S. 246—247.

A note on the effect of finite breadth of the hammer striking a pianoforte string. D. Basu. Current Sci. **8** (1939), Nr. 3, S. 109—110.

Present-day preferences for certain melodic intervals in the natural, equal-tempered and pythagorean scales. J. Acous. Soc. Am. **10** (1939), Nr. 3, S. 256.

Analyse de sons musicaux. A. Dammann. C. R. Acad. Sci., Paris **208** (1939), Nr. 17, S. 1283—1285.

21. Elektrische Musik

Über Näherungswerte zur Berechnung temperierter Schwingungszahlen und deren Anwendung auf Getriebe für vollelektrische Orgeln. E. Trautwein. Akust. Z. **4** (1939), Nr. 4, S. 261—262.

La synthèse des timbres dans l'orgue électrique Tournier. R. Viallard. Nature, Paris 1939, Nr. 3042, S. 71 bis 75.

Practical design for an electronic piano. F. D. Merrill. Electronics, N. Y. **12** (1939), Nr. 5, S. 30—33.

The electone — an electronic piano. G. S. Taylor. Electronics, N. Y. **12** (1939), Nr. 1, S. 26—28.

An experimental electronic violin. L. H. Stauffer. J. appl. Phys. (russ.) **10** (1939), Nr. 2, S. 96—100.

Das Trautonium. H. Scherer. Musikwoche **7** (1939), Nr. 16, S. 243—244.

The electrical production of musical tones. S. T. Fisher. J. Soc. Mot. Pict. Engrs. **32** (1939), Nr. 3, S. 280—297. Engng. J., Montreal **22** (1939), S. 264—268.

Electronic church chimes. F. Dostal. Electronics, N. Y. **12** (1939), Nr. 8, S. 18—19.

Electronic music. Electrician, Lond. **122** (1939), Nr. 3171, S. 313—314, Nr. 3172, S. 343—344.

Ein neues elektrisches Musikinstrument. H. Boucke. Funk 1939, Nr. 23, S. 564—565.

The novachord. F. D. MERRILL. Electronics, N. Y. **12** (1939), Nr. 11, S. 16—19, 92—93.

22. Piezoelektrische Kristalle

Piezo-electricity. Electrician, Lond. **122** (1939), Nr. 3176, S. 477—478.

Quartz-oscillators, Electrician, Lond, **122** (1939), Nr. 3177, S. 507—508.

Neuartige Steuer- und Filterquarze. L. ROHDE. Z. techn. Phys. **20** (1939), Nr. 3, S. 75—80.

Anomalies of thickness vibration of quartz plates due to non-uniform thickness. J. KOGA & M. TATIBANA. Electrotechn. J., Tokyo **3** (1939), Nr. 4, S. 81—85.

Crystal-oscillator circuits for experimenters. Television, Lond. **12** (1939), Nr. 134, S. 229—232.

Über die innere Reibung in Quarzkristallen. R. GÜNTHER. Elektr. Nachr.-Techn. **16** (1939), Nr. 2, S. 53—62.

Small temperature coefficient of frequency of quartz plates. P. MODRAK. Wireless Engr. **16** (1939), Nr. 184, S. 6—15.

Les phénomènes optiques sur un réseau ultrasonore dans l'ouverture circulaire d'un anneau de quartz. J. CERVOSKA. J. Phys. Radium (7) **10** (1939), Nr. 2, S. 97—103.

Variable frequency quartz crystals. S. UDA & S. HONDA. Electrotechn. J., Tokyo **3** (1939), Nr. 2, S. 47.

Laue photograph of quartz and its application. J. KOGA & M. TATIBANA. Electrotechn. J., Tokyo **3** (1939), Nr. 2, S. 38—39.

La piezoelettricità nell'elettroacoustica. C. CRESCINI. Radio e Televisione **3** (1939), Nr. 4, S. 236—245.

The production of quartz resonators for the London-Birmingham coaxial cable system. C. F. BOOTH & C. F. SAYERS. Post Office electr. Engr. J. **32** (1939), Nr. 2, S. 88—93.

An efficient piezoelectric oscillator. W. W. SALISBURY & C. W. PORTER. Rev. sci. Instrum. **10** (1939), Nr. 9, S. 269—270.

Sur le mesure de certaines constantes élastiques adiabatiques des cristaux, par voie ultrasonore. E. BAUMGARDT. C. R. Acad. Sci., Paris **208** (1939), Nr. 17, S. 1280—1282.

Piezooscillatori con neutralizzazione della capacita del quarzo. N. BOELLA. Alta Frequ. **8** (1939), Nr. 8/9, S. 512—515.

Reverberation and acoustics in the case of prismatic polyhedrons. G. CHIGRINSKIJ. J. techn. Phys. (russ.) (1939), **9** Nr. 23, S. 2110—2138.

Elastische Eigenschwingungen von Kristallen bei gemischten Randbedingungen. H. WIERZEJEWSKI. Z. Kristallographie **101** (1939), Nr. 1/2, S. 94—116.

Quick building-up of the electron-coupled quartz oscillator. T. HAYASI & S. AKASI. Electrotechn. J., Tokyo **3** (1939), Nr. 10, S. 219—222.

Die Schwingquarz-Ersatzschaltung. F. BERGTOLD. Auslese d. Funktechn. 1939, Nr. 5, S. 117—119.

Quarzfilter und Filterquarze. Auslese d. Funktechn. 1939, Nr. 5, S. 120—121.

On quartz crystal vibrators as elements for electrical wave-filters. Z. KAMAYACHI & T. ISHIKAWA. Nippon. electr. Commun. Engng. 1939, Nr. 18, S. 103—106.

23. Ultraschall

Neuere Ergebnisse der Ultraschallforschung. L. BERGMANN. Verh. dtsch. phys. Ges. (3) **20** (1939), Nr. 1, S. 39—41.

Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. L. BERGMANN. Brennstoff- u. Wärmewirtsch. **21** (1939), Nr. 8, S. 151—155, Nr. 9, S. 171 bis 174.

Wesen und Anwendung des Ultraschalls. E. C. METSCHL. ETZ **60** (1939), Nr. 2, S. 33—40.

Der Ultraschall. B. BRUNKHORST. Funktechn. Vorwärts **9** (1939), Nr. 8, S. 227—228.

Supersonics. Electrician, Lond. **122** (1939), Nr. 3174, S. 411—412, Nr. 3175, S. 445—446, Nr. 3176, S. 477 bis 478, Nr. 3177, S. 507—508, Nr. 3178, S. 543—544, Nr. 3179, S. 571—572, Nr. 3180, S. 601—602, Nr. 3181, S. 631—632.

Supersonic phenomena. W. T. RICHARDRS. Rev. modern phys. **11** (1939), S. 36—64.

Physiologische Effekte des Ultraschalls. M. PONZIO. Rass. PTT 1939, Nr. 3, S. 154—163.

An improved magnetostriction oscillator. W. W. SALISBURY & C. W. PORTER. Rev. sci. Instrum. **10** (1939), Nr. 4, S. 142—146.

Supersonic absorption in helium. P. KRASNOVSHKIN & E. PUMPER. C. R. (Doklady) Acad. Sci., URSS **23** (1939), Nr. 5, S. 448—449.

Ultrasonics velocity and the adiabatic compressibility of some liquids. S. Bhagavantem & Ch. V. Joga RAO. Proc. Indian Acad. Sci. (A) **9** (1939), Nr. 4, S. 312—315.

Ultrasonic velocities in any adiabatic compressibilities of mixtures of acetic acid and water. A. W. SMITH & L. M. EWING. J. Chem. Phys. **7** (1939), Nr. 8, S. 632. Z. Elektrochem. **45** (1939), Nr. 9, S. 659—661.

Applications of supersonic waves, effect on metals. Engineer **166** Suppl. (1939), S. 177—179.

Comparison of influence of audible sound and of supersonic waves on colloidal and two phase systems. H. FREUNDLICH & D. W. GILLINGS. Faraday Soc., Transact. **35** (1939), Nr. 2, S. 319—324.

Theorien der Lichtbeugung an Ultraschallwellen. N. S. NAGENDRA NATH. Akust. Z. **4** (1939), Nr. 4, S. 263 bis 272, Nr. 5, S. 289—301.

Diffraction of light by supersonic waves. I. K. N. RAO. Ind. Acad. Sci., Proc. **9** (A) (1939), Nr. 5, S. 422—446.

Ultraschall im Dienste der Heilkunde. W. FEHR. Funktechn. Mh. 1939, Nr. 3, S. 93—94. Funk 1939, Nr. 10, S. 265—266.

Die Fresnelsche Beugungserscheinung an Ultraschallwellen und ihre Auswertung nach der Methode von Mascart. F. MAHLER. Ann. Phys., Lpz. (5) **34** (1939), Nr. 8, S. 689—716.

Über die Ausbreitung und Absorption von Ultraschall im menschlichen Gewebe und seine therapeutische Wirkung bei Ischias und Plexusneuralgie. R. POHLMANN. Verh. dtsch. phys. Ges. (3) **20** (1939), Nr. 1, S. 52—54.

Über die Absorption des Ultraschalls im menschlichen Gewebe und ihre Abhängigkeit von der Frequenz R. POHLMANN. Phys. Z. **40** (1939), Nr. 5, S. 159—161.

Dispersion of supersonic velocity in liquids. K. G. KRISHNAN. Ind. Acad. Sci., Proc. **9** (A) (1939), S. 382—385.

The influence of an ultrasonic field on the rate of coagulation of negative AgJ — sols by electrolytes. J. J. HERMANNS. Rec. Trav. chim. Pays-Bas **58** (1939), Nr. 2, S. 139—163.

Das Ultraschall-Lichtrelais beim Fernsehen. G. Otterbein. ETZ **60** (1939), Nr. 6, S. 161—163.

Dissipative acoustic reflection coefficients in gases by ultrasonic interferometry. R. S. Alleman. Phys. Rev. **55** (1939), Nr. 1, S. 87—93.

Wasserreinigung durch Ultraschall. H. Beuthe, E. Furbach u. Ch. Sörensen. Akust. Z. **4** (1939), Nr. 4, S. 209—214.

Sur la dispersion des ultrasons dans les liquides. L. Zachoval. J. Phys. Radium (7) **10** (1939), Nr. 7, S. 350 bis 354.

La dispersion des ondes ultrasonores dans l'huile de ricin. L. Zachoval. C. R. Acad. Sci., Paris **208** (1939), Nr. 4. S. 265—266.

Zur Werkstoffprüfung mittels Ultraschalls. F. Kruse. Akust. Z. 4 (1939), Nr. 3, S. 153—168.

Über die Dispersion des Ultraschalls in Flüssigkeiten. F. Matossi. Phys. Z. **40** (1939), Nr. 8, S. 294—297.

Ein neuer Ultraschallgenerator für die biologisch-medizinische Forschung. J. Pätzold, K. Osswald u. H. Born. Fundamenta radio. **4** (1939), Nr. 5/6, S. 190 bis 195.

Influenza degli ultrasuoni sul „potenziale di scarica" dell'idrogeno. R. Piontelli. Lincei Rend. (6) **27** (1939), Nr. 7, S. 357—363.

Supersonic dispersion in vapors. W. Railston. J. Acous. Soc. Am. **11** (1939), Nr. 1, S. 107—112.

Absorption von Ultraschall in Quecksilber. P. Rieckmann. Phys. Z. **40** (1939), Nr. 18, S. 582—590.

Remarks on the anomalous damping of ultrasonic waves. O. Halpern. Phys. Rev. (2) **55** (1939), Nr. 9. S, 881 bis 882.

Sur la mesure de certaines constantes adiabatiques des cristaux par voie ultrasonore. E. Baumgardt. C. R. Acad. Sci., Paris **208** (1939), S. 1280—1282.

Supersonic dispersion and infra-red radiation. E. G. Richardson. Nature, Lond. **143** (1939), Nr. 3624, S. 638—639.

Zur Theorie der Doppelbrechung bei nicht kugelförmigen Kolloiden im Ultraschallfelde. S. Oka. Kolloid-Z. **87** (1939), Nr. 1, S. 37—43.

Über die Wirkung von Ultraschallwellen auf die Kolloiderscheinungen. VI. Über den Einfluß von Ultraschall auf das Drehungsvermögen von hochmolekularen Substanzen kolloider Natur. I. Versuche an Gelatinelösungen. N. Sato. Kolloid-Z. **87** (1939), Nr. 2, S. 186—191.

Supersonic velocity in gases and vapours. S. K. Kulkarni Jatkar. J. Indian Inst. Sci., **22** A (1939), Nr. 19—37.

Supersonic velocity in air, steam, carbon dioxide and carbon disulphide. S. K. K. Jatkar. Indian Inst. Sci., J. **22** A (1939), Nr. 6, S. 93—110.

Supersonic velocity in gases and vapours. III. Volume resonance in a supersonic interferometer. S. K. K. Jatkar. J. Indian Inst. Sci. **21** A (1939), S. 477—487. VI. Specific heats of the vapours of alcohols and ethyl acetate. J. Indian Inst. Sci. **22** A (1939), S. 39—58. VII. S. 59—78.

A comparison of the influence of audible sound and of ultrasonic waves in colloidal and two-phase systems. H. Freundlich & J. W. Gillings. Transact. Faraday Soc. **35** (1939), S. 319—324.

Präzisionsmessungen der Ultraschallgeschwindigkeit in verschiedenen Flüssigkeiten. E. Schreuer. Akust. Z. **4** (1939), Nr. 4, S. 215—230.

Ricerche nel campo degli ultrasuoni. A. Giacomini. Lic. Sci. progr. recn. econom. naz. **10** (1939), S. 580 bis 584.

Über die im Wasser durch Ultraschallwirkung bedingten Lichterscheinungen. P. Paunoff. Ann. Univ. Sofia, Fac. phys. math., Abt. I Math. Phys. **34** (1939), Nr. 1, S. 313—351.

Absorption des ondes ultra-acoustiques, dans un mélange acétoneau. P. A. Bajouline & J. M. Merson. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **24** (1939), Nr. 7, Nr. 690—691.

Les phénomènes optiques sur un réseau ultrasonore dans l'ouverture circulaire d'un anneau de quartz. J. Cerovska. J. Phys. et le Radium (7) **10** (1939), Nr. 2, S. 97—103.

Sur la mesure de certaines constantes élastiques adiabatiques des cristaux, par voie ultrasonore. E. Baumgardt. C. R. Acad. Sci., Paris **208** (1939), Nr. 17, S. 1280—1282.

Generatori di ultrasuoni. A. Ciaccia. Rass. PTT **11** (1939), S. 232—238.

Ultraschall — ein Überblick. O. Macek. Auslese d. Funktechn. 1939, Nr. 5, S. 113—116.

Zerreißen von Makromolekülen mit Ultraschall. G. Schmid. Forsch. u. Fortschr. **15** (1939), Nr. 35/36, S. 430—431. Z. Elektrochem. **45** (1939), Nr. 9, S. 659—661.

Über die Wirkung von Ultraschallwellen auf die Kolloiderscheinungen. 6. Mitt. Über den Einfluß von Ultraschall auf das Drehungsvermögen von hochmolekularen Substanzen kolloider Natur. 2. Versuche an Tanninlösungen. N. Sata. Kolloid-Z. **88** (1939), Nr. 2, S. 182—184.

Die Ultraschallwellen und ihre Beziehungen zur Chemie. J. H. Frydlender. Rev. Produits chim. Actual sci. réun. **42** (1939), S. 321—325.

Sur la décharge électrique d'un conducteur par un courant d'air hypersonique. O. Yadoff. C. R., Acad. Sci. Paris **208** (1939), S. 1802—1804.

Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen. H. Görtler. Z. angew. Math. Mech. **19** (1939), Nr. 6, S. 325—337.

Absorption of supersonic waves in water and in aqueous suspensions. G. K. Hartman & A. B. Foche. Phys. Rev. **56** (1939), S. 217.

The ultrasonic method for the determination of the elastic properties of solids. H. Ludloff. Phys. Rev. **55** (1939), S. 593—594, 681.

The dispersion of supersonic wands in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel and magnesium. S. K. Shearard & A. B. Focke. Phys. Rev. **56** (1939), S. 217.

Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids. H. S. Tsien. J. aeron. Sci. **6** (1939), S. 399—407.

La luminescence de l'eau sous l'action des ultrasons. P. Paounoff. C. R., Acad. Sci., Paris **209** (1939), S. 33—36.

Effect of ultrasonic vibration of vaccinia virus. F. L. Hopwood, M. H. Salaman & A. S. McFarlane. Nature, Lond. **144** (1939), Nr. 3643, S. 377.

Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über eine neue Sichtbarmachungsmethode stehender Ultraschallwellen in Flüssigkeiten. II. O. Nomoto. Proc. physic-math. Soc. Japan **21** (1939), S. 495—496.

On the supersonic wave generatio. K. Yosioka. Sci. Pap. Inst. phys. chem. Res. Tokio **36** (1939), Nr. 915 bis 916.

NACHRICHTEN

Prof. Dr. **Hans Kneser,** Marburg, wurde am 1. April d. J. als planmäßiger a. o. Professor an das I. Physikalische Institut der Universität Berlin berufen.

Prof. Dr. Friedrich Krüger †

Am 21. April d. J. ist Prof. Dr. Friedrich Krüger, Direktor des Physikalischen Instituts zu Greifswald, im 63. Lebensjahr gestorben. Mit ihm ist eine Persönlichkeit besonders eindringlichen Gepräges dahingegangen.

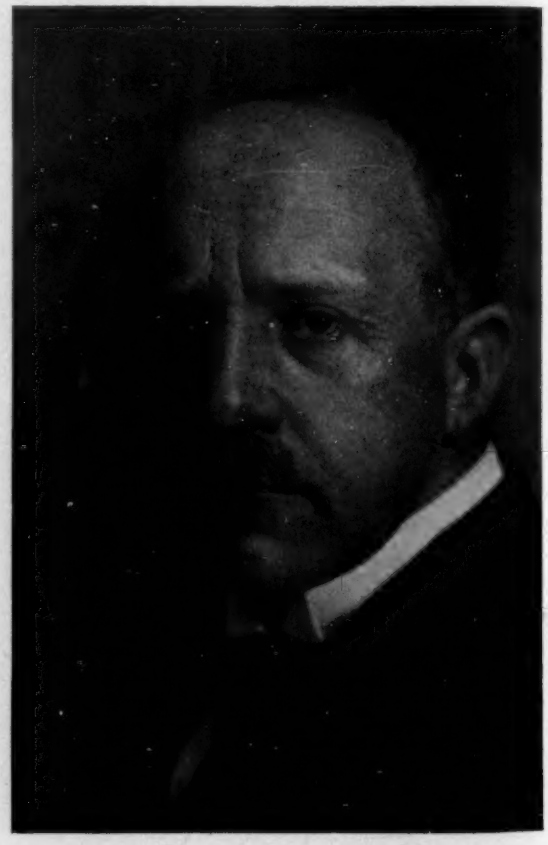
Überblickt man das gesamte physikalische Wirken des Forschers und Hochschullehrers Prof. Krüger, so überrascht eine nicht oft anzutreffende Vielseitigkeit. Als Schüler von Nernst hat seine besondere Vorliebe der physikalischen Chemie gegolten. Die Verehrung, die er seinem berühmten und großen Lehrer zeitlebens entgegenbrachte, ließ ihn noch vor kurzem einen Aufsatz veröffentlichen mit dem Titel: 50 Jahre seit dem Erscheinen von W. Nernsts Arbeit über „Die elektromotorische Wirksamkeit der Ionen". Krügers Beziehung zur Chemie kommt auch in seinen lichtelektrischen Arbeiten zum Ausdruck, z. B. in der gemeinsam mit Taege veröffentlichten über die „Vergiftung von Photokathoden", die das spezielle Interesse des Kolloid-Chemikers erregt hat.

Ferner hat Prof. Krüger die vielen Arbeiten, die in seinem Institut aus dem Schülerkreis Prof. Reinkobers auf dem Gebiet der Ultrarotforschung entstanden sind, stets mit Rat und Tat unterstützt.

Endlich hat sich Prof. Krüger auch frühzeitig akustischen Fragen gewidmet, wofür ihm die akustische Wissenschaft und die technische Akustik Dank schulden.

Die klassischen akustischen Arbeiten Krügers fallen in die Jahre 1914—1920, also in eine Zeit, in welcher die Akustik im allgemeinen nicht besonders gepflegt wurde.

Die Untersuchungen betreffen die Erforschung der „Hieb-, Spalt- und Schneidentöne". Bereits 1878 hatte V. Strouhal die Höhe eines Tones, welcher beim Durchschlagen der Luft mit einem Stab entsteht, als proportional der Schlaggeschwindigkeit und umgekehrt proportional der Dicke des Stabes ermittelt. In einer hydrodynamischen Theorie hatte v. Kármán die Stabilitätsbedingung geradliniger Wirbel aufgestellt, wie sie beim Durchziehen eines Stabes durch eine Flüssigkeit entstehen.



Außerdem hatte derselbe Verfasser gemeinsam mit Rubach Wirbelbilder einer strömenden Flüssigkeit hinter einem Stabe aufgenommen (1912). F. Krüger hat nun in seinem zum Teil mit Lauth und Schmidtke veröffentlichten Arbeiten die Entstehung der Hiebtöne auf die Ablösung derartiger

Wirbel zu beiden Seiten des Stabes unter Zugrundelegung der v. KÁRMÁNschen Stabilitätsbedingung zurückgeführt. Diese Erklärung fand eine Bestätigung darin, daß er die experimentellen Befunde von STROUHAL und v. KÁRMÁN und RUBACH quantitativ miteinander in Einklang bringen konnte (1914, 1919). In weiteren Arbeiten (1919 und 1922) übertrug F. KRÜGER seine Vorstellungen auf die Entstehung der sog. „Spalttöne", wie sie beim Austreten von Luft aus Öffnungen auftreten. Waren es im Falle der Hiebtöne „gezogene" Wirbel, so sind es im Falle der Spalttöne „geschobene", welche den Ton hervorrufen. Wenn einem Spalt, durch den die Luft ausströmt, eine Schneide parallel gegenübersteht, so entstehen „Schneidetöne". Für den kreisförmigen Spalt mit gegenüberstehender kreisförmiger Schneide kommt nach F. KRÜGER die Tonerzeugung durch ein Pulsieren der ausströmenden ringförmigen Luftlamelle zustande, indem abwechselnd ein nach innen rotierender Wirbelzug an der Innenseite der Ringschneide und ein nach außen rotierender an der Außenseite entlangläuft (1919 und 1920). Die Vorgänge sind dann mit der TOEPLERschen Schlierenmethode sichtbar gemacht und durch Zeitlupenaufnahmen festgehalten worden (1936). Hierdurch wurde der Beweis für die Richtigkeit der KRÜGERschen Anschauungen einwandfrei erbracht, so daß der Vorgang der Tonerzeugung bei den Pfeifen durch die Arbeiten von KRÜGER und seinen Schülern als restlos geklärt betrachtet werden kann.

Die Beschäftigung mit der Physik der Pfeifen hat KRÜGER dazu geführt, sich in den Jahren 1933 bis 1934 auch mit speziellen Fragen des Orgelbaues zu befassen. Leider liegen hierüber keine Veröffentlichungen vor. An dem stürmischen Fortschritt der technischen Akustik im letzten Jahrzehnt nahm er insofern regsten Anteil, als er sich frühzeitig für die in ständiger Entwicklung begriffene Ultraschalltechnik interessierte und in seinem Institut praktische Versuche zur Entgasung von Glasschmelzen durch Ultraschall durchführte (1938). Er plante, mit Unterstützung der Industrie seine Laboratoriumserfahrungen im großen für die Entgasung von Metallschmelzen in die Praxis umzusetzen.

Versucht man nun, ein Bild des Menschen FRIEDRICH KRÜGER zu entwerfen, so stellen sich dem Bemühen, seine Persönlichkeit auf einen einheitlichen Nenner zu bringen, ähnliche Schwierigkeiten entgegen, wie etwa der Charakterisierung eines Künstlers. Zweifellos war ihm ein Zug von Genialität eigen. Sein lebendiger — man könnte fast sagen ruheloser — Geist konzipierte groß angelegte Pläne, nicht nur wissenschaftlicher, sondern auch organisatorischer Art, die den Hochschulbetrieb und das Gemeinwesen betrafen. Seine Ideen versuchte er mit dem ihm eigenen Temperament durchzusetzen. Daß er hierbei oft auf Widerstände stieß, war selbstverständlich. Aber es hieße, den Menschen FRIEDRICH KRÜGER verkennen, wollte man in den bisweilen unbequemen Äußerungen seiner Kämpfernatur einen Grundzug seines Wesens erblicken. FRIEDRICH KRÜGER war im Grunde ein sehr gütiger Mensch, er hatte einen Blick für das Echte und Menschliche bei andern, und er hat — oft im Verborgenen — viel Gutes getan und geholfen, wo immer er helfen konnte. Und so trauern heute viele um ihn als Forscher, Hochschullehrer und Menschen.

GOTTFRIED SOMMER

Prof. Dr. Erich Giebe †

Am 22. Juni ist im Alter von 63 Jahren Prof. Dr. ERICH GIEBE, Direktor an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt mitten aus einem arbeits- und erfolgreichen Leben unerwartet abberufen worden. Mit Direktor GIEBE ist ein Forscher dahingegangen, dessen ganzes Leben der Wissenschaft gewidmet war. Alles das, was er an Leistungen aufzuweisen hat, ist in den 36 Jahren seiner Zugehörigkeit zur Physikalisch-Technischen Reichsanstalt vollbracht worden.

GIEBES wissenschaftliche Tätigkeit läßt sich in drei Zeitabschnitte gliedern. Der erste Abschnitt fällt in die Jahre 1904 bis etwa 1922. In dieser Zeit wurden die Normale der Kapazität und Selbstinduktion sowie die Verfahren zu ihrer präzisen Messung entwickelt. Mit der von GIEBE konstruierten Bifilarbrücke gelang es erstmalig für Frequenzen bis zu 5000 Hz bei Vergleichsmessungen Genauigkeiten von etwa $1 \cdot 10^{-5}$ des Selbstinduktionswertes zu erreichen, gleichzeitig wurden die grundlegenden Erfahrungen über das Verhalten von Selbstinduktion, Eigenkapazität und Wirkwiderstand in Abhängigkeit von der Frequenz gesammelt. Die Kenntnisse über die Wirkung der verteilten Erdkapazitäten und die damit zusammenhängenden Fragen der Abschirmung von Spulen und Brückenzweigen sowie die richtige Erdung von Brückenanordnungen verdanken wir der grundlegenden und sorgfältigen Arbeit GIEBES. Er konstruierte gleichzeitig die ersten Sätze von Selbstinduktionsnormalen hoher Präzision und geringer Verluste, die auch heute noch in gleicher Form von der einschlägigen Industrie auf den Markt gebracht werden, ebenso praktisch verlustfreie und frequenzunabhängige Normalluftkondensatoren der verschiedensten Kapazitätswerte. Zur Messung der Kapazität in internationalem Farad benutzte GIEBE die MAXWELLsche Unterbrechermethode, sie wurde von ihm, insbesondere durch Konstruktion eines rotierenden Unterbrechers und eines selbsttätigen Tourenreglers für den Antriebsmotor in mühevoller Arbeit zu höchster Vollkommenheit entwickelt. Für den auf die Sekunde und das internationale Ohm bezogenen Kapazitätswert wurde damals für größere Kapazitäten eine Genauigkeit von etwa $1 \cdot 10^{-5}$ ihres Wertes erzielt. Daneben wurden Methoden für Ver-